MINISTÉRIO DO EXÉRCITO
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Geodésia Espacial

José Carlos Penna de Vasconcellos
Ten Cel QEM – Cartografia

1992

IME

JORGE HYGINO B. SAMPAIO JR.

MINISTÉRIO DO EXÉRCITO
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

GEODÉSIA ESPACIAL

JOSÉ CARLOS PENNA DE VASCONCELLOS, MC
Ten Cel QEM / Cartografia

Aos meus filhos

Carlos Alexandre e Patrícia

dedico esta obra

AGRADECIMENTOS

Ao Instituto Militar de Engenharia pelo suporte técnico fornecido para a realização deste trabalho.

Aos meus alunos nos anos de 1990/91 pela colaboração prestada ao nível de discussões em sala de aula, as quais serviram para o enriquecimento desta obra.

À subdivisão de Apoio, na pessoa do Sr. Cel QEM Mário Emilio Paiva Michel, pela amizade e pelo total apoio prestados.

Aos funcionários da Gráfica, cujo trabalho anônimo possibilitou a fina elaboração deste trabalho, pelo esmêro com que se empenharam na apresentação e acabamento, nas pessoas do Sr. Zani Martins Auguste e Sras, Maria Elizabete Lima de Mesquita e Luzimar Pinheiro da Costa na digitação; Srta. Jana da Graça Oliveira na edição final e concatenação dos arquivos; Sr. Wagner Caetano de Souza nos desenhos; Sr. Hyram Cordeiro na diagramação e montagem; Sr. Nilson Félix Rigaud Francisco na gravação das chapas e Sr. Hermínio Labre na impressão.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO À GEODÉSIA ESPACIAL 1

1. Conceitos e considerações gerais 1

2. Fundamentos dos métodos de posicionamento geodésico,com uso de satélites artificiais. 6

3. Satélites de uso geodésico. Histórico. 13

4. Equipamentos para observações de satélites artificiais 14

CAPÍTULO 2 - INTRODUÇÃO À MECÂNICA CELESTE 25

1. Generalidades 25

2. Movimento em um campo central 26

3. Leis fundamentais da mecânica celeste 28

4. Movimento Kepleriano 34

5. Propriedade das órbitas elípticas, parabólicas e hiperbólicas 38

6. Sistema orbital de coordenadas 59

7. Posicionamento de satélites. Problema direto 62

8. Problema inverso do posicionamento de satélites 67

9. Movimento perturbado de um satélite artificial 75

CAPÍTULO 3 - MEDIÇÃO DOPPLER 19

1. O efeito Doppler - Fizeau 19

2. Geometria do efeito Doppler 81

3. Medição Doppler 83

CAPÍTULO 4 - REFRAÇÃO IONOSFÉRICA E TROPOSFÉRICA 89

1. Considerações gerais 89

2. Redução devida à refração ionosférica 91

3. Redução devida a refração troposférica 96

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 118

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO À GEODÉSIA ESPACIAL

1. Conceitos e considerações gerais

1.1. Geodésia

O objetivo da Geodésia é a determinação da forma e dimensões do nosso planeta. Como a Terra é um corpo limitado por uma superfície irregular, tal determinação exige o levantamento de pontos escolhidos sobre essa superfície; os demais são obtidos por interpolação.

Obviamente, numa primeira aproximação, as irregularidades da superfície terrestre podem ser negligenciadas, reduzindo - se o problema à determinação da forma e dimensões do modelo geométrico mais adequado. A Geodésia do século XIX praticamente se concentrou na pesquisa dos parâmetros do " melhor elipsóide ".

1.2. Geodésia Geométrica

A Geodésia Geométrica proporciona as coordenadas elipsoidais (φ, λ) através da medição de ângulos e distâncias - grandezas puramente geométricas - definindo a projecão normal P' (projecão de Helmert) de um ponto P da superfície física sobre o modelo de referência, conforme se vê na Figura 1.1.

O conhecimento das coordenadas astronômicas permite chegar às componentes do desvio da vertical e à separação entre o geóide e o elipsóide

$$\begin{cases} \xi = \phi - \varphi \\ \eta = (\Lambda - \lambda) \cos \varphi = (A - \alpha) \ \text{cotg} \ \varphi \ , \end{cases} \tag{1.1}$$

onde (ϕ , Λ) são as coordenadas astronômicas e A é o azimute astronômico, e

$$dN^{*} = - \varepsilon \, ds$$

$$\therefore N_B^* = N_A^* - \int_A^B \varepsilon ds \ , \qquad (1.2)$$

sendo $\varepsilon = \xi \cos \alpha + \eta \operatorname{sen} \alpha$,

a componente do desvio da vertical ao longo do perfil AB , cujo azimute é α.

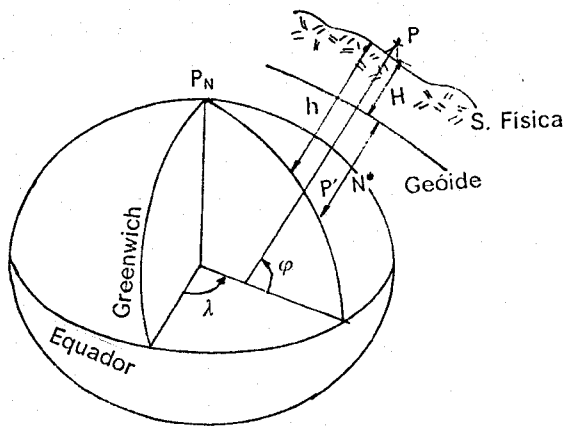


Figura 1.1 - Projeção de Helmert.

O nivelamento geométrico associado à gravimetria conduz à determinação de H (altitude ortométrica).

Desta forma, a posição do ponto P da superfície física da Terra fica definida em relação ao modelo geométrico de referência por meio das três coordenadas geodésicas (φ, λ, h), onde a terceira coordenada ,denominada altitude geométrica ou elipsóidica, é determinada pela equação

$$h = H + N^* , \qquad (1.3)$$

onde não se considera o fato de H ser contado ao longo da vertical do lugar e N^* ao longo da normal, como se vê na Figura 1.2, que representa a projeção de Pizzeti.

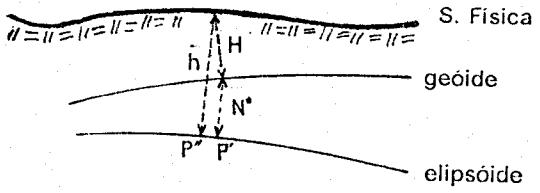


Fig. 1.2 - Projeção de Pizzeti.

Na maioria dos sistemas geodésicos existentes, a superfície de referência tangencia o geóide no datum. Isso significa que, mesmo em se tratando de um único modelo, a sua orientação varia de um sistema para outro, e o centro não coincide com o centro de gravidade da Terra.

1.3. Geodésia Física

A Geodésia Física preocupa - se com o estudo do campo da gravidade e suas aplicações geodésicas.

Utilizando - se o método gravimétrico, calcula - se no datum as componentes do desvio da vertical e a ondulação do geóide, possibilitando, assim a orientação geocêntrica do modelo, definido pela fórmula da gravidade teórica utilizada.

O cálculo é efetuado pelas fórmulas de Vening - Meinezz e pela integral de Stokes, que são as fórmulas principais da Geodésia Física.

1.4. Geodésia Tridimensional

Seu conceito deve- se ao geodesista inglês Hotine, em meados dos anos 50. Baseia - se no fato de que as coordenadas geocêntricas cartesianas de um ponto da superfície terrestre podem ser obtidas em conjunto, num único processo, ao contrário do que ocorre no sistema clássico, que proporciona a latitude e a longitude de uma estação através de cálculos planimétricos, enquanto a altitude é obtida por cálculos altimétricos, ou seja são realizadas duas operações independentes. A Geodésia tridimensional encontra um ótimo campo de aplicação na Geodésia Espacial.

1.5. Geodésia Espacial

Com o advento da era espacial, os satélites artificiais demonstraram se constituir numa das mais poderosas ferramentas já colocadas à disposição da

ciência em vários campos, entre os quais a Geodésia.

As aplicações geodésicas dos satélites artificiais, bem como certos assuntos de campos conexos necessários à sua boa compreensão são englobados sob a denominação de Geodésia Espacial.

A Geodésia Espacial possui métodos que conduzem às coordenadas "quase - geocêntricas " de estações terrestres, enquanto outros proporcionam coordenadas rigorosamente geocêntricas, em ambos os casos de maneira completamente independente da vertical. Equivale a dizer que a Geodésia Espacial permite a determinação da posição relativa ou absoluta de pontos da superfície terrestre, ou seja, tais pontos podem estar referidos a um sistema geodésico relativo ou absoluto.

As possibilidades são inúmeras: as observações podem ser conduzidas sobre um satélite de órbita já determinada, ou pode o satélite funcionar meramente como um alvo espacial, cuja posição orbital não importa.

As observações podem consistir na medida de direções (câmaras balísticas), ou na medida de distâncias (Secor, Laser), ou de ambas, ou na medida de diferença de distâncias (Doppler), ou ainda, na medida de diferença de fase (interferometria). As observações podem ter sede em uma estação isolada, ou em mais de uma, caso em que a simultaneidade das observações passa a ser requisito essencial.

Sempre que o resultado das observações consistir na posição de estações terrestres (absolutas ou relativas), diz-se que o método utilizado é um método geométrico. Por outro lado, considerando o satélite artificial como um corpo que se move no campo da gravidade, o estudo do seu movimento pode conduzir aos parâmetros definidores do campo. Os métodos da Geodésia Espacial que se preocupam com a determinação de tais parâmetros serão denominados de métodos dinâmicos.

Pode-se resumir a Geodésia Espacial quanto às possibilidades das observações e quanto aos métodos utilizados no quadro que se segue:

Possibilidades das observações

- sobre
  - satélites com órbita já determinada
  - satélites que funcionam meramente como alvo espacial
- por
  - câmaras balísticas (direções)
  - Secor, Laser (distâncias)
  - Doppler (diferença de distâncias)
  - Interferometria (diferença de fase)
- em
  - uma estação isolada ("point-positioning")
  - várias estações (simultaneamente)

Métodos utilizados

- Geométricos (posicionamento de estações terrestres)
  - triangulação espacial
  - trilateração espacial
  - rastreamento Doppler
  - rastreamento interferométrico
- Dinâmicos - preocupam-se com os parâmetros definidores do campo da gravidade, consequentemente, com a forma da Terra.

Nos métodos dinâmicos, alguns parâmetros do campo do potencial gravitacional se vinculam à forma da Terra, o que significa dizer que a forma da Terra pode ser determinada através dos métodos dinâmicos.

Como exemplo, pode-se citar:

• O coeficiente do termo de 2ª ordem no desenvolvimento do potencial em harmônicos zonais, ou o fator dinâmico de forma J_2 , conduz ao achatamento do modelo de referência, ou seja,

$C_{20} = J_2 \rightarrow f_a = 1/298.25$ (achatamento)

$C_{22} \rightarrow$ elipticidade equatorial

$C_{30} = - J_3 \rightarrow$ forma de pera (pear shaped)

1.5.1 - Possibilidades da Geodésia espacial

• A determinação do achatamento terrestre pelos métodos dinâmicos melhorou a precisão dessa determinação obtida anteriormente com as mais

modernas técnicas astronômicas, gravimétricas e da Geodésia geométrica.

• Aumentam-se as perspectivas para o estudo do movimento da crosta, como por exemplo a deriva dos continentes e o deslocamento relativo de pontos na superfície da Terra.

• Possibilidades de estudos geodésicos da Lua e de planetas do sistema solar, pelo rastreamento de sondas lunares e planetárias.

•Através técnicas espaciais, estudou-se o movimento do polo, melhorando o posicionamento do CIO (Conventional International Origin), substituindo-o pelo CTP (Conventional Terrestrial Pole), obtido com melhor precisão, e adotado a partir de 01/01/1988.

2. Fundamentos dos métodos de posicionamento geodésico, com o uso de satélites artificiais.

No item anterior, foi visto que, nos métodos geométricos, as grandezas medidas podem ser:

- direções (triangulação espacial)
- distâncias (trilateração espacial)
- diferenças de distâncias (Doppler)
- diferenças de fase (interferometria)

2.1 - Triangulação espacial

Na triangulação espacial, um satélite S é fotografado contra o fundo estrelado, simultaneamente, a partir de duas estações terrestres A e B não intervisíveis. As coordenadas uranográficas topocêntricas do satélite, relativas às duas estações definem as direções AS e BS, ou seja, o plano S A B.

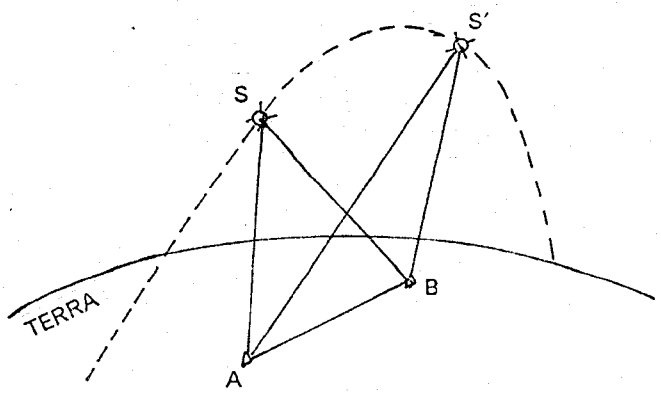


Fig. 1.3 - Triangulação espacial

Procedimento análogo, em relação a uma segunda posição S' do satélite, determina o plano S'AB, e, a interseção dos dois planos define a direção AB, conforme a Figura 1.3. A posição do satélite não importa, pois o mesmo funciona como uma mira. O método independe da vertical, o que equivale dizer que independe de hipóteses geofísicas. O número mínimo de pares de observações simultâneas para definir a orientação de um triângulo é de 6 (seis) pares, conforme se vê na Figura 1.4.

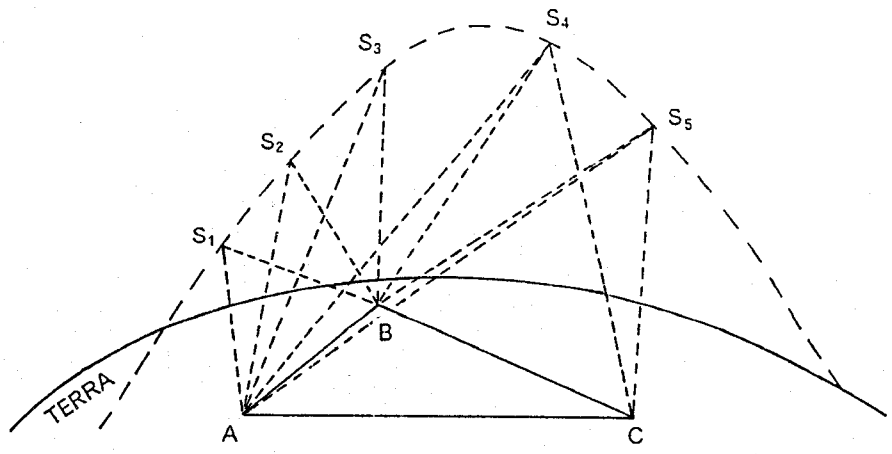


Fig. 1.4 - Observações simultâneas na triangulação espacial

É óbvio que não convém ficar no número mínimo de observações, e sim, vincular a cada direção observações super-abundantes, que permitam um ajustamento pelo MMQ.

Nas chapas fotográficas são identificadas as imagens do satélite e das estrelas, sendo feitas medidas em um comparador. As coordenadas uranográficas das estrêlas são calculadas para o instante da observação e, em consequência, as coordenadas do satélite.

A triangulação espacial (observações simultâneas) tem como objetivo incorporar estações remotas a um sistema geodésico, ou possibilitar a conexão entre sistemas geodésicos diferentes.

Método orbital: Na observação de direções, deve-se ainda considerar o caso em que a órbita deve ser conhecida, quando se deseja determinar a posição geocêntrica da estação de rastreamento, conforme se vê na Figura 1.5.

Em resumo, o satélite é fotografado na posição S_1 (conhecida) a partir da estação E, obtendo-se os cossenos diretores da direção $\vec{\rho}_1$.

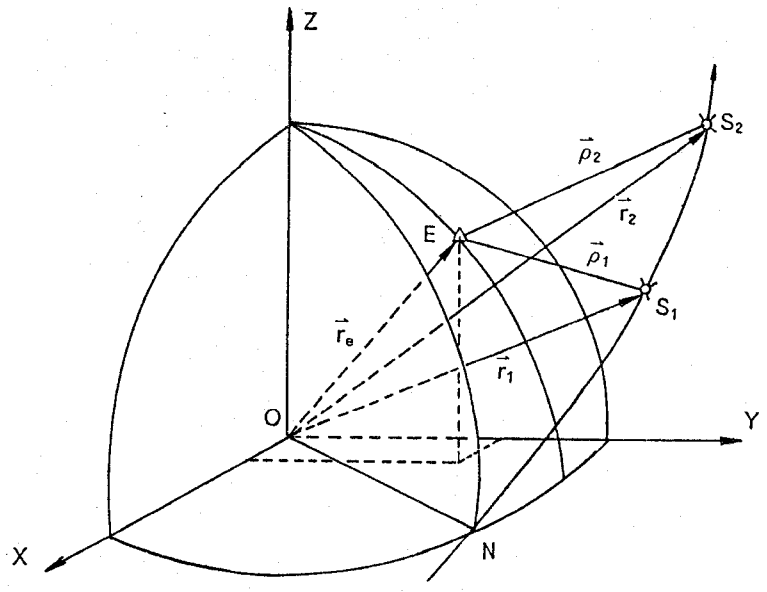


Fig. 1.5 - Triangulação espacial - método orbital

Tem-se, portanto, a direção passante por um ponto conhecido S_1 e que contém o ponto desconhecido E. Uma segunda observação propicia uma direção passante por S_2 (conhecido) e que contém a estação E, logo, a interseção das duas retas

define a posição da estação terrestre E, sem o envolvimento da vertical. Da mesma forma, devem ser utilizadas observações superabundantes.

2.2 - Trilateração espacial

Consiste em medir a distância estação-satélite, e pode ser utilizada isoladamente ou combinada com a triangulação. De forma semelhante ao que ficou estabelecido para a observação de direções, o conhecimento da órbita será ou não necessário, dependendo da modalidade da trilateração. Assim, esta pode ser conduzida de duas maneiras:

Método orbital - quando exige o conhecimento da órbita;

Observações simultâneas - quando a posição do satélite não necessita ser conhecida.

No método orbital, o satélite pode ser observado simultaneamente das 3 estações conhecidas A, B, C, mas não da estação desconhecida X (Figura 1.6).

As observações simultâneas realizadas a partir das estações conhecidas servem para a determinação de um arco em duas ou mais órbitas, que permite extrapolação para as posições nas quais o satélite é observado da estação desconhecida X. A medida das distâncias de X às posições agora conhecidas do satélite conduz, por trilateração, às coordenadas de X.

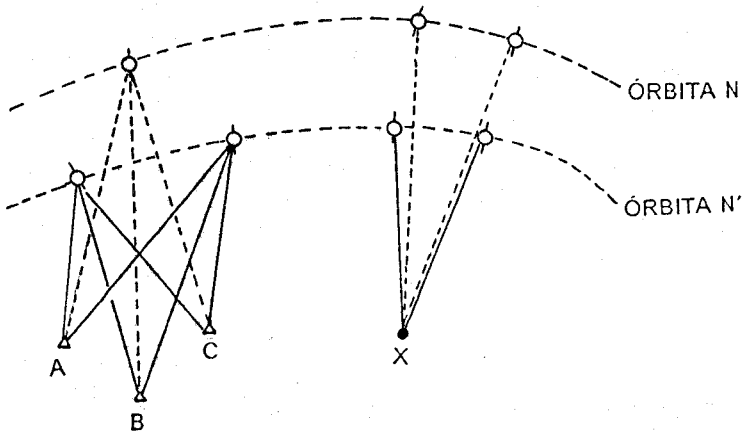


Fig. 1.6 - Trilateração espacial - método orbital

No método das observações simultâneas, o satélite pode ser observado ao mesmo tempo das quatro estações (inclusive da desconhecida) o que dispensa o conhecimento dos parâmetros orbitais, conforme a Figura 1.7.

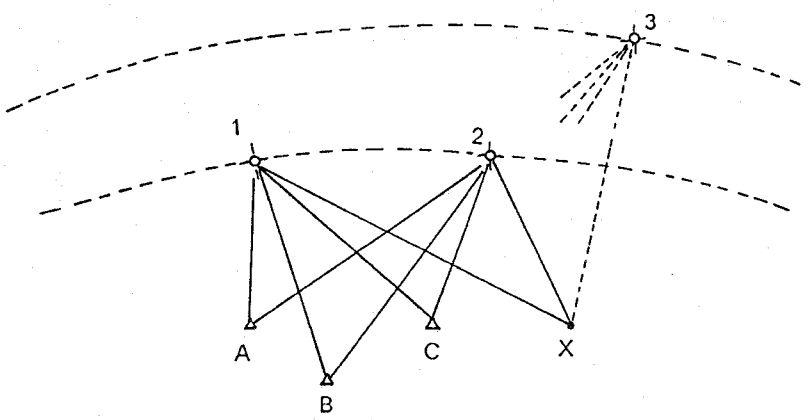


Fig. 1.7 - Trilateração espacial - observações simultâneas

Geometricamente, a interpretação é a seguinte: as três distâncias medidas a partir das estações conhecidas são os raios de três esferas com centros nessas estações e que se interceptam na posição ocupada pelo satélite no instante da observação; agora, considere-se tal operação executada para três posições do satélite; essas posições passam a ser os centros de três esferas cujos raios são as distâncias medidas a partir da estação desconhecida e que se interceptam precisamente nessa estação. Na Figura 1.7, se a terceira posição do satélite pertencesse ao plano X-1-2, a solução estaria geometricamente prejudicada.

Com os modernos equipamentos de rastreamento, o usuário poderá dispor dos parâmetros orbitais e realizar observações simultâneas duas a duas, criando assim um terceiro caso de trilateração espacial, onde se obtém as distâncias vetoriais entre as estações de rastreamento simultâneo, decompostas em suas componentes ΔX, ΔY, ΔZ, o que possibilita a medição e o ajustamento de figuras geodésicas.

2.3 - Rastreamento Doppler

O rastreamento Doppler de satélites, sob o ponto de vista geométrico, proporciona a diferença de distâncias do observador a duas posições conhecidas do satélite. Isto significa que o observador a duas posições se encontra sobre a superfície de um hiperbolóide de revolução com focos nas posições conhecidas do satélite. Para ilustrar melhor o que foi dito, considere-se a Figura 1.8. Nos instantes t_1, t_2, t_3, etc..., o satélite passa pelos pontos S_1, S_2, S_3, etc..., de posições conhecidas dentro de sua órbita.

Na estação de rastreamento E, a frequência Doppler é integrada entre esses instantes, obtendo-se as contagens Doppler e as diferenças de distâncias $\rho_2 - \rho_1$, $\rho_3 - \rho_2$, etc...

O lugar geométrico dos pontos E do espaço, tais que suas diferenças de distâncias a dois pontos fixos (por exemplo S_1 e S_2) seja constante, é um hiperbolóide de revolução que tem seus focos nesses pontos e por eixo a reta que estes definem.

Partindo-se das coordenadas do satélite, e conhecendo-se $\rho_2 - \rho_1$, pode-se calcular a equação do hiperbolóide.

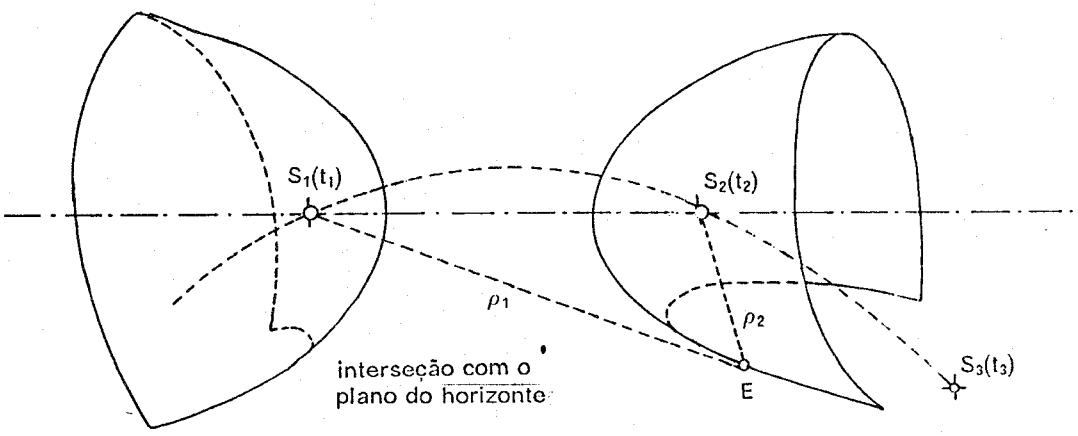


Fig. 1.8 - Interpretação geométrica do rastreamento Doppler.

Com sucessivas determinações análogas obtém-se outros hiperbolóides

que, salvo erros de observação e de cálculo, se interceptariam na estação E, obtendo-se suas coordenadas por interseções múltiplas. O problema estará geometricamente resolvido com um mínimo de três hiperbolóides.

2.4 - Rastreamento interferométrico

A interferometria clássica baseia-se na medida da diferença de fase de sinais de rádio emitida por quasares (fontes naturais de rádio-frequência), e que atingem duas antenas receptoras de dois rádio-telescópios instalados em estações situadas sobre vértices geodésicos de 1ª ordem, ou seja, a distância entre elas é conhecida com precisão. Tal processo permite determinar as coordenadas celestes dos quasares.

De maneira inversa, conhecendo-se as coordenadas dos quasares e as de uma das estações (rádio-telescópio fixo), determinam-se as coordenadas da outra estação (rádio-telescópio móvel) e a distância entre elas com excelente precisão.

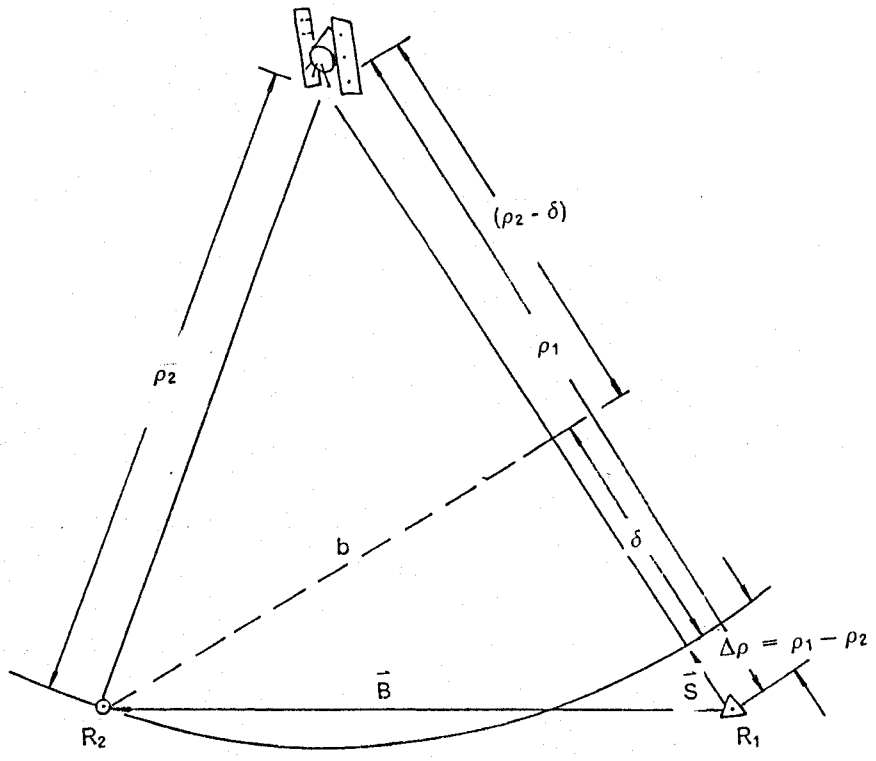


Fig. 1.9 - Geometria das observações interferométricas com os satélites NAVSTAR/GPS

O rastreamento interferométrico (Figura 1.9) consiste em aplicar esse princípio da interferometria, ou da interferometria com bases muito longas (very long base-line interferometry), a satélites de órbita alta (NAVSTAR/GPS), possibilitando o posicionamento geodésico relativo entre as duas estações de rastreamento (R1 - conhecida e R2 - a determinar) e a medição da distância entre elas, valendo-se, para isso, da medição da diferença de fase das ondas portadoras, e da diferença de tempo em que a frente de onda atinge as duas estações, cuja expressão é dada por

$$\Delta\tau^{m} = - \frac{\left(\rho_1 - \rho_2\right)^2 - B^2}{2c\,\rho_1} + \frac{\vec{B} \cdot \vec{s}}{c} + \text{erros}, \qquad (1.4)$$

onde c é a velocidade eletromagnética.

3. Satélites de uso geodésico. Histórico

Cabe inicialmente distinguir o que sejam satélites ativos e passivos. Os passivos são aqueles que não transportam equipamento e somente podem ser rastreados quando se deslocam em região iluminada pelo sol; os satélites ativos emitem sinais, os quais são recebidos por receptores passivos.

A seguir, ver-se-á, suscintamente, alguns dos satélites geodésicos:

a) ANNA - satélites americanos, ativos emitem sinais luminosos em épocas conhecidas.

b) GEOS - satélites americanos, ativos, munidos de emissores de sinais luminosos muito breves e possantes, possuem emissores de frequência para operações com rastreadores Doppler, um respondedor SECOR e prismas refletores para medição direta de distâncias por laser.

Os satélites ANNA e GEOS gravitam a uma altura de 1000 a 1200 km e possuem órbitas quase circulares oblíquas (ANNA e GEOS-1) ou polares (GEOS-2).

São invisíveis a olho nu.

c) ECHO I e II, PAGEOS - satélites passivos, leves em poliester aluminizado. São inflados após seu lançamento e colocação em órbita por sublimação de uma substância sólida que passa ao estado gasoso nas condições ambientais do espaço. Seu diâmetro após inflados é de 30 metros. Alguns de seus parâmetros orbitais são:

ECHO I - gravita a 7500 km aproximadamente, e é inclinado de 50° em relação ao plano do equador (inclinação em órbita);

ECHO II - gravita com órbita polar a uma altura aproximada de 7500 km;

PAGEOS - gravita com órbita polar e circular a 11000 km de altura.

d) TRANSIT - satélites ativos, cuja mensagem é recebida por rastreamento Doppler. O sistema TRANSIT/NNSS é constituído de 5 (cinco) satélites com órbita polar aproximadamente circular com altura aproximada de 1100 km e período orbital de cerca de 107 minutos.

e) NAVSTAR - satélites ativos, cujos dados são recebidos por diversos métodos de rastreamento eletrônico. O sistema NAVSTAR/GPS, em sua mais recente versão, terá 21 satélites ativos orbitando em 6 órbitas subsíncronas, cujos nodos ascendentes são espaçados de 60°; em cada órbita gravitam 3 satélites espaçados de 120°. As órbitas são quase circulares, inclinadas de 55° em relação ao plano do equador, tendo uma altura aproximada de 20.200 km e período de 12 horas siderais. Haverão 3 satélites de reserva, em órbita ainda não determinada.

4. Equipamentos para observação de satélites artificiais

4.1 - Métodos de rastreamento

Através de observações conduzidas sobre um satélite é possível obter sua posição num dado sistema de referência e num determinado instante, o que

constitui o rastreamento do satélite, o qual pode ser feito por um dos métodos seguintes:

- **ótico**
  - visual - olho nu, lunetas, teodolitos
  - fotográfico
    - Baker - Nunn
    - Hewit
    - Câmara IGN
    - Wild BC - 4
    - Mots
    - Van , Afu - 75, etc...
- **eletrônico**
  - interferometria (Minitrack, Navstar)
  - efeito Doppler (Transit, Navstar)
  - Medida de distâncias (Secor, Laser, Radar,...)
- **fotoelétrico**

4.1.1.- Rastreamento fotográfico

O rastreamento por métodos fotográficos consiste em fotografar o satélite contra o fundo do céu estrelado para deduzir, por interpolação com estrêlas de posições conhecidas, as coordenadas uranográficas topocêntricas do satélite num dado instante. Constitue-se no fundamento da triangulação espacial. As câmaras utilizadas com esse propósito, por terem sido inicialmente empregadas no estudo do movimento de mísseis, ainda hoje são conhecidas por câmaras balísticas, podendo ser fixas ou móveis.

a) Câmaras fixas

1º) Câmara BAKER - NUNN

Usada no SAO (Smithsonian Astrophysical Observatory). Possui computador que fornece os elementos de orientação e velocidade angular para o eixo ótico da câmara, a fim de que a mesma acompanhe o satélite.

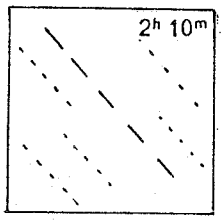
2º) Câmara HEWITT

De fabricação inglesa e excelente precisão, fotografa objetos de até a 8ª grandeza.

As câmaras fixas podem ser operadas segundo três tipos de técnica:

•Com a câmara estacionária

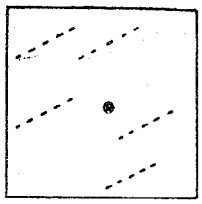
A Câmara permanece imóvel em torno do eixo durante a exposição. As imagens das estrelas serão pequenos traços sobre o filme, e o satélite, como se move mais rapidamente, terá como imagem um risco maior. A exposição não é contínua, devido a um dispositivo que interrompe a exposição 5 (cinco) vezes.



Os traços correspondem ao intervalo de tempo em que o obturador permanece aberto. A identificação é fácil, já que o satélite é relativamente brilhante.

•Com acompanhamento uniforme

Imprime-se à câmara a velocidade predita para o satélite, obtendo-se, desta forma, uma imagem puntiforme paa o satélite, enquanto as estrelas deixam na chapa uma trajetória que seria contínua se o dispositivo que interrompe a exposição do obturador não a fragmentasse em 5 (cinco) traços.



No traço central da imagem de cada estrela, correspondente à 3ª abertura do obturador da câmara, aparece uma imagem na foto, produzida pelo cronômetro auxiliar, com precisão de 10^{-4} segundos.

• Técnica combinada

É possível combinar as duas técnicas anteriores para fotografar um satélite de pequeno brilho, quando as estrelas que formam o fundo são também de brilho fraco.

b) Câmaras móveis

1º) Câmara IGN

De fabricação francesa, com distância focal de 30,5 cm, utilizando chapas de vidro medindo 15 x 18 cm.

2º) Câmara Wild BC-4

É uma adaptação da câmara aérea RC-5 montada na base de um teodolito

T-4, munida de lentes com distância focal 305 mm; utiliza chapas 18 x 18 cm; pode fotografar astros até a 9ª grandeza.

3º) Câmara MOTS (Minitrack Optical Tracking System

Usadas nas estações Minitrack da NASA, são versões modificadas de câmaras usadas para calibração de antenas. Possuem lentes com distância focal 1.000 mm e abertura do obturador 200 mm.

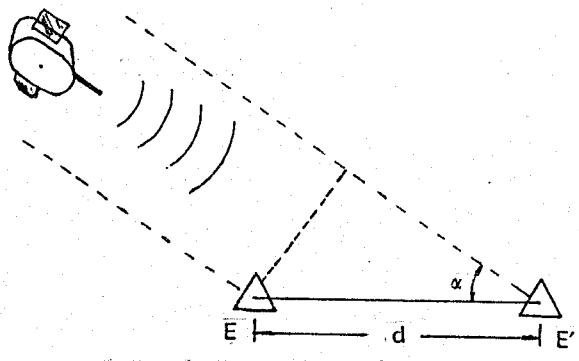
4.1.2 - Rastreamento eletrônico

Ao contrário do rastreamento ótico, onde os satélites geralmente são passivos (com excessão do ANNA), o rastreamento eletrônico exige satélites ativos que levem a bordo um transmissor que emita ondas eletromagnéticas, em geral de alta frequência, para reduzir os efeitos da refração.

•Vantagem - as observações independem das condições meteorológicas, bastando que o satélite esteja acima do horizonte;

•Desvantagem - qualquer pane no equipamento transportado pelo satélite faz com que o sistema entre em colapso.

a) Interferometria



A rádio - interferometria baseia-se simplesmente na medida da diferença de fase de sinais de rádio emanados de um satélite de órbita alta(NAVSTAR), que atingem duas antenas separadas por uma distância a ser determinada, resultando conhecido o cosseno diretor da direção do satélite em relação ao eixo que liga as duas antenas. Conhece-se as coordenadas de uma das estações.

b) Radar

O radar permite condições para a determinação de distância e direção. Nesse caso, o satélite terá um comportamento passivo, limitando-se a refletir os sinais emitidos pelo radar e incidentes sobre ele.

Além de não ser muito difundido, o rastreamento por radar apresenta algumas desvantagens em confronto com o rastreamento ótico:

- custo elevadíssimo
- a precisão se deteriora com o aumento da distância;
- a opacidade às ondas eletromagnéticas de alguns materiais usados na fabricação do satélite, dificultando a deteção do mesmo;
- a necessidade de uma predição acurada, face à pequena largura do feixe do radar.

c) Laser (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation)

Sua primeira aplicação em Geodésia Espacial foi a de iluminar o satélite passivo, possibilitando a sua fotografia mesmo quando não iluminado pelo sol e, aproveitando o retorno do LASER refletido, obter a distância estação-satélite, combinando a triangulação e a trilateração espacial.

A maneira mais precisa para a obtensão de uma distância estação-satélite é atualmente através dos distanciômetros eletrônicos ou a laser celestes.

O sistema é constituído de três componentes básicos: o transmissor e o receptor na estação e os retro-refletores no satélite.

Os rastreadores a laser encontram aplicação no estudo do movimento do polo, altimetria por satélites, deriva dos continentes, determinação dos números de Love, etc...

d) Efeito Doppler

A utilização do efeito Doppler no rastreamento de satélites ganhou grande importância com o advento dos satélites do sistema TRANSIT/NNSS para aplicações em Geodésia e em navegação. *Falar-se-á mais detalhadamente sobre a* medição Doppler em Capítulo à parte.

e) Secor (Sequential Collation of Range - Comparação Sequencial de Distância)

O sistema foi desenvolvido pelo Corpo de Engenheiros do Exército dos EUA em 1964. De quatro estações terrestres, sendo três conhecidas e uma a determinar, são emitidos sinais que vão ao satélite SECOR, sendo por este retransmitidas. Em função da diferença de fase entre o sinal que sai e o que chega, acha-se a distância estação-satélite, possibilitando a determinação das coordenadas da estação desconhecida.

4.1.3 - Rastreamento foto-elétrico

Os métodos ditos foto-elétricos se fundamentam na utilização da célula foto-elétrica para detetar a passagem um satélite através de fendas convenientemente dispostas em uma luneta. Tem sido empregado com muito pouca freqüência.

4.2 - Características gerais dos equipamentos

Durante o processo de estudo para escolha do equipamento a adquirir, o usuário vê-se à frente de uma apreciável quantidade de prospectos e informações dos fabricantes, dificultando sua decisão, por falta de parâmetros que o auxiliem na análise. A alta tecnologia utilizada, o perigo do obsoletismo e a semelhança de várias funções existentes nos rastreadores, deixam em dúvida o mais experiente técnico.

Procura-se abordar a seguir, 10 (dez) itens considerados importantes na análise das características dos equipamentos, ressaltando, para cada um deles, os seus principais aspectos.

a) Precisão

Os equipamentos deve ser capazes de receber duas freqüências, possibilitando a correção de primeira ordem e o modelamento das ordens superiores da refração ionosférica. Tais freqüências são de 400 e 150 MHz para os receptores TRANSIT e de 1575,42 e 1.227,60 MHz para os receptores NAVSTAR.

A época da integração Doppler deve ocorrer preferencialmente quando o sinal de tempo do satélite chega ao centro de fase da antena. Contudo a propagação do sinal Doppler e do tempo através o receptor envolve atrasos. O atraso do sinal de tempo através do receptor tem um valor nominal, que é função da largura de banda do sinal do receptor. O projetista tem somente se limitado a escolher uma largura de banda específica e com ela o valor nominal do atraso do sinal de tempo. Dependendo dos diversos fabricantes e do modelo do receptor, o valor nominal do atraso pode ser algo entre 500 e 1500 microsegundos, no caso dos receptores TRANSIT, e entre 200 e 1800 macrosegundos, no caso dos receptores NAVSTAR. A consideração importante não é se o receptor tem um atraso nominal do receptor alto ou baixo, mas se permanece constante durante a passagem do satélite.

Após a deteção do sinal de tempo do satélite, um registrador é usado para contar os ciclos Doppler. Todavia, a época da integração é também atrasada, uma vez que a contagem somente inicia com o cruzamento da freqüência Doppler pelo zero, numa passagem crescente por zero. Este atraso da contagem pode ser no máximo um ciclo da freqüência Doppler. Fabricantes de receptores têm aplicado diferentes métodos em seu intento para dimensionar este atraso.

Todos os receptores geodésicos disponíveis (TRANSIT e NAVSTAR) usam

um relógio interno para medir a época da contagem da freqüência Doppler, uma vez que este permite alguma eliminação do tempo (timing jitter). Além disso, o enfoque difere se as contagens são feitas pelo receptor (receiver time frame) ou pelo satélite (satellite time frame).

Uma vez que o oscilador deve ser usado como referência, qualquer instabilidade do mesmo aparece como uma variação da freqüência Doppler. Grande parte da soluções para o "point positioning" do oscilador, e algumas soluções mais sofisticadas modelam também o deslocamento linear. Nenhum modelo pode, contudo, eliminar as variações do oscilador de pequeno valor, às quais correspondem um componente de ruído na medida da freqüência Doppler. O valor do menor erro em que pode ser atualmente alcançado com osciladores de cristal é de 1 parte em 10^{-12}.

O centro de fase da antena é o ponto da antena no qual todas as medidas são feitas. Qualquer variação desse ponto durante a passagem do satélite, ou de uma passagem para outra, novamente corresponde a um aumento do ruído na posição. Desde que as variações do centro de fase são devido à reflexão terrestre, eles devem, no mínimo teoricamente, ser eliminados com um plano terrestre infinito, o que envolve algumas considerações de ordem prática. O centro de fase pode variar até a ordem de 1 milímetro. Assume-se que a variação do centro de fase da antena permaneça dentro do eixo principal da antena.

b) Armazenamento dos dados e operação de campo

Inicialmente usou-se exclusivamente a fita de papel, tendo aparecido posteriormente no mercado as fitas cassette, a qual permite que a verificação dos dados seja feita no campo, de forma a evitar o retorno ao mesmo. Atualmente existem receptores com disquetes de 3,5" e até com discos rígidos com grande capacidade de armazenagem.

c) Verificação da performance do sistema

Para ter a capacidade de verificar a performance do sistema no campo é essencial aumentar a confiança no trabalho, isto é, evitar que um ponto de controle tenha de ser reocupado devido a alguma má função do equipamento que somente foi detetada durante o processamento posterior dos dados. Cada fabricante de equipamento tem considerado este problema e dado a sua solução. As soluções existentes são a disponibilidade de funções internas ou de simuladores de satélite separados. Após o equipamento ter sido montado, o simulador é ligado e provê dados de medição simulados pré-determinados de uma passagem do satélite. É importante que estes dados possam ser verificados fora do cassete para assegurar que houve a gravação. Este teste também pode ser realizado antes do equipamento ir para o campo. Embora estes testes detetem, a priori, várias panes, sua desvantagem é que qualquer má função durante o trabalho de campo somente é descoberto após no mínimo uma passagem do satélite, sendo que, problemas mais sérios são detetados após o processamento de programas mais sofisticados. A melhor solução envolve a combinação dos dois procedimentos.

d) Operação automática

Se a opção for a operação automática, ela tem que ser aplicada ao sistema globalmente, incluindo a aquisição automática de dados meteorológicos, necessários ao refinamento da correção da refração troposférica.

Atualmente, quase todos os receptores disponíveis são totalmente automáticos, desde o rastreamento até a gravação. A operação completamente automática demanda que a operação do sistema seja com uma bateria externa, pois os geradores sempre requerem atenção particular.

e) Depanagem no campo

Mesmo o mais rústico equipamento pode apresentar um defeito no campo. Este é o motivo porque a operação totalmente automática e unipessoal não é aconselhada. Se ocorrer um defeito, e o equipamento for constituído por

módulos, um operador experiente pode efetivar a depanagem por simples substituição do módulo. Para evitar a necessidade de um operador de grande experiência é desejável que o sistema contenha alguma indicação que identifique o módulo deficiente. Para solucionar este problema foi introduzido o conceito de BITE. O BITE ("built in-teste equipament") é um conceito de manutenção que requer circuitos de monitoramento introduzidos no equipamento que realiza a medição e que tenta identificar o módulo em pane. Não se deve esperar que BITE seja capaz de reconhecer todos os defeitos, mas, no mínimo 50% deles podem ser identificados, o que minimiza o tempo ocioso do equipamento no campo.

f) Consumo de energia e portabilidade

Preferencialmente, o equipamento deve requerer um mínimo de energia, o que redundará em maior autonomia e menor tamanho e peso. Se o consumo de energia e portabilidade são condições de grande importância, os fabricantes têm considerado estes fatores em seus projetos, construindo equipamentos cada vez mais econômicos e operacionais, além de menores e mais leves.

g) Rigidez na construção e operação em meios hostis

O equipamento deverá resistir ao choque e vibração, e deverá operar sobre uma larga faixa de temperatura e umidade. Há entretanto, compromissos necessários, uma vez que outros fatores tais como tamanho mínimo do equipamento ou eficiente seleção de componentes tem que ser considerados. Previsão de choque e vibração são importantes somente durante o transporte do equipamento, pois que, durante a operacão o receptor permanece parado.

h) Faixa de variação da temperatura

Os microcircuitos disponíveis permitem normalmente a operação de -40°C a 80°C . Contudo, outros componentes tais como as baterias interna e externa, oscilador de precisão, drive do cassette, etc..., limita esta faixa para todo o equipamento.

Umidade é possivelmente o problema menos severo desde que o equipamento em operação consome energia e tem em conseqüência uma elevada temperatura interna. Isto significa que, mesmo em ambiente com quase 100% de umidade, a umidade do equipamento é baixa. Contudo, para operação contínua sob umidade extrema, todo o equipamento ou, no mínimo, as partes mais sensíveis, devem ser cobertas com preparado especial.

i) Rádio-interferência

Embora os receptores geodésicos operem em freqüência da banda "L", e estas sejam protegidas, transmissores mal projetados ou de rádio móveis, estações de televisão, etc..., causam interferência pela transmissão de harmônicos ou larguras de banda que se ajustam a restrita faixa de operação dos satélites geodésicos. Nada pode ser feito se esta inferferência polui a faixa de operação diretamente, mas filtros altamente seletivos no sistema de antena e na entrada do receptor podem ajudar bastante.

Além disso, mas não diretamente conectado com rádio-interferência, é importante ter pré-amplificadores junto com a antena, uma vez que eles permitirão o uso de longos cabos entre a antena e o receptor sem deterioração da sensibilidade do sistema.

j) Capacidade de expansão do sistema

Os parâmetros orbitais dos satélites são passíveis de alterações. Por exemplo, é possível ser lançado um satélite com órbita mais baixa ou mais alta que os outros. Para acomodar diferentes aplicações no sistema do satélite, o equipamento receptor deve possibilitar adaptações e expansões. Qualquer equipamento somente pode ser economicamente adaptado ou expandido se for projetado modularmente. O microprocessador ainda pode oferecer a vantagem de ser reprogramado ou possibilitar expansão de memória.

CAPÍTULO 2

INTRODUÇÃO À MECÂNICA CELESTE

1. Generalidades

A utilização do método orbital exige o conhecimento da posição do satélite artificial em sua órbita (bem como a sua velocidade) numa dada época (ou instante).

Os parâmetros definidares da órbita dependem basicamente do campo da gravidade ao qual o satélite artificial se acha submetido; porém existem forças de menor influência, tais como a atração luni-solar, o atrito com a atmosfera (arrasto), a pressão de radiação solar, o albedo, as marés oceânicas e terrestres, as quais devem ser consideradas.

Aqui, considerar-se-á, apenas a influência do campo gravitacional, e mesmo assim de maneira simplificada, admitindo-se uma Terra esférica e homogênea no tocante à distribuição das massas. Nessas circunstâncias, a Mecânica Celeste permite considerar a massa da Terra concentrada no seu centro de gravidade, ou seja, a Terra é reduzida a um ponto material o mesmo ocorrendo, evidentemente, com o satélite artificial.

O estudo do movimento de um ponto material em relação a um segundo ponto, ambos sujeitos exclusivamente à mútua atração, constitui-se no "problema dos dois corpos". A órbita resultante, dita órbita normal (ou Kepleriana), será assunto também desta Unidade.

Será visto mais adiante que as órbitas normais são meramente hipotéticas, servindo como simples aproximações das órbitas reais (se bem que extremamente úteis para o desenvolvimento do assunto) as quais são perturbadas, em virtude daqueles fatores inicialmente negligenciados.

2. Movimento em um campo central

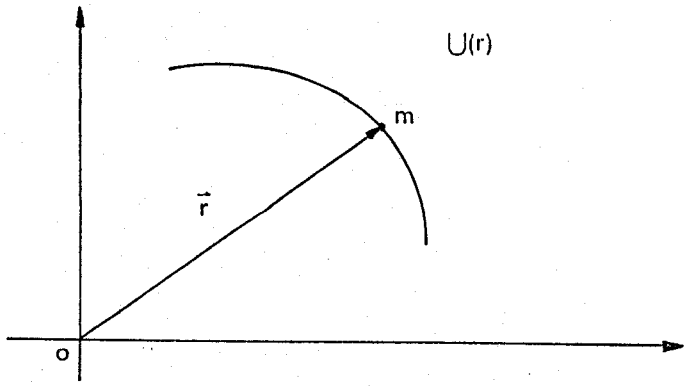


Fig. 2.1 - Movimento central

O Campo Central é caracterizado pelo fato da energia potencial de uma partícula (ou corpo) depender só de "r", isto é, da distância do corpo à origem do sistema de coordenadas (centro de atração), conforme a Figura 2.1.

$$U = U(r)$$

A força $\vec{F}$ em tal ponto é dada por

$$\vec{F} = \frac{-\partial U}{\partial \vec{r}} = \frac{-\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = -f(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r} \qquad (2.1)$$

onde U(r) é a energia potencial da partícula e a força $\vec{F}(r)$ é dirigida segundo o raio vetor $\vec{r}$.

2.1. Conservação do momento angular σ

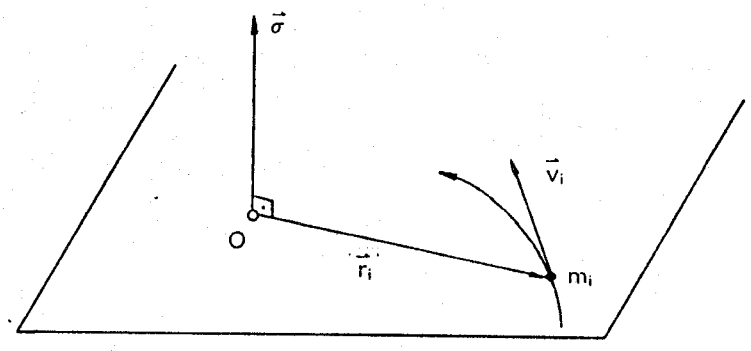


Fig. 2.2 - Momento angular

A Figura 2.2 representa o momento angular, ou seja, a quantidade de

movimento do corpo de massa m_i em sua trajetória, cujo centro de atração é o ponto O, através da equação

$$\vec{\sigma} = \sum_i (\vec{r}_i \Lambda m_i \vec{v}_i), \tag{2.2}$$

cuja derivada em relação ao tempo é

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \sum_i \left[\underbrace{(\vec{r}_i \Lambda m_i \vec{v}_i)}_{=0} + \vec{r}_i \Lambda m_i \ddot{\vec{r}}_i \right],$$

ou

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \Lambda m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{r}_i \Lambda \vec{F}_i = \tau, \text{ (torque ou momento)} \tag{2.3}$$

que representa o momento das forças atuantes em relação a O.

Levando a Equação 2.1 na Equação 2.3, tem-se

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \sum_i \left[\vec{r}_i \Lambda \frac{\vec{r}_i}{r_i} \cdot f(r_i) \right] = 0$$

logo

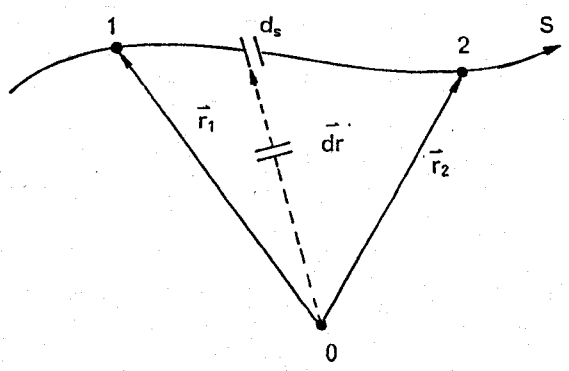
$$\vec{\sigma} = \vec{r} \Lambda m \vec{v} = \text{constante}, \tag{2.4}$$

donde se conclui que <u>o momento angular é constante</u>, isto é, não há atuação de torques externos, e portanto o movimento se processa em um plano, pois o conjunto dos pontos tais que

$$\vec{r} \Lambda m \vec{v} = \text{constante},$$

definem o plano $(\vec{r}\ ,\ m\vec{v})$ perpendicular a $\vec{\sigma}$.

2.2. <u>Trabalho devido a uma força central</u>



$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F}(r)\, d\vec{r}$$

ou

$$W_{12} = -\int_1^2 f(r) \frac{\vec{r}}{r} \vec{dr} = -\int_{r_1}^{r_2} f(r)\, dr \tag{2.5}$$

Pela Equação 2.5, observa-se que o trabalho só depende dos pontos extremos do deslocamento (inicial e final), logo, o sistema é conservativo.

Se, por exemplo, a força for igual a

$$f(r) = \frac{KMm}{r^2}$$

ter-se-á

$$W_{12} = -KMm\int_{r_1}^{r_2} r^{-2}\, dr = KMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \qquad (2.6)$$

As propriedades do campo central são:

- o momento angular é constante;
- o movimento é plano;
- o sistema é conservativo.

2.3. Trajetórias no movimento central

As componentes da força que atua no corpo de massa "m", segundo as direções radial e transversal, são dadas pelas Expressões 2.10 e 2.11. Sejam, inicialmente, as expressões

$$\vec{r} = r \cdot \hat{e}_r \qquad (2.7a)$$

e

$$\vec{r} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\dot{\hat{e}}_r \qquad (2.7b)$$

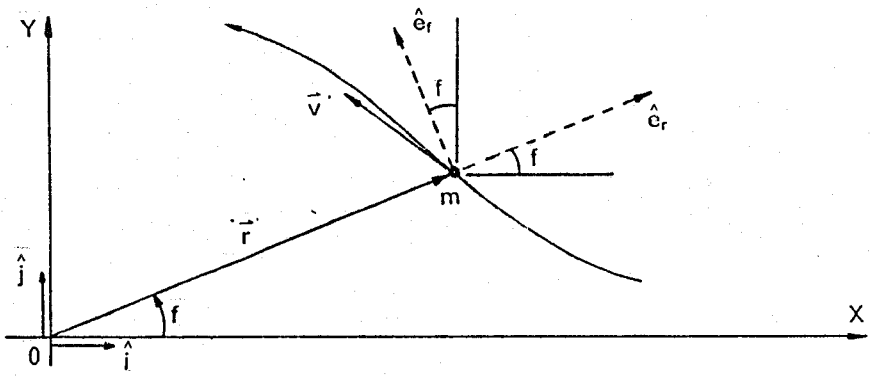


Fig. 2.3 - Decomposição radial e transversal da trajetória

Pela geometria da Figura 2.3, tem-se:

$$\hat{e}_r = \cos f \, \hat{i} + \text{sen } f \, \hat{j}$$

e

$$\hat{e}_f = -\text{sen } f \, \hat{i} + c \; s \; f \, \hat{j}$$

Derivando-se a expressão de $\hat{e}_r$ em relação ao tempo, ter-se-á

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{f} \, (-\text{sen } f \, \hat{i} + \cos f \, \hat{j}) = \dot{f} \, \hat{e}_f,$$

donde se tiram as expressões para a velocidade e aceleração, por derivação, em suas componentes radial e transversal

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \dot{r} \, \hat{e}_r + r\dot{f} \, \hat{e}_f \tag{2.8}$$

e

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{f}^2) \, \hat{e}_r + (r\ddot{f} + 2\dot{r}\dot{f}) \, \hat{e}_f. \tag{2.9}$$

A decomposição da força fica:

Força radial: $$F(r) = (\ddot{r} - r\dot{f}^2) \tag{2.10}$$

Força transversal: $$0 = m \, (r\ddot{f} + 2\dot{r}\dot{f}), \tag{2.11}$$

sendo nula a força transversal porque não há atuação de torques externos. Agora, multiplicando a força transversal por r e integrando, vem

$$0 = m \, (r^2\ddot{f} + 2r\dot{r}\dot{f}),$$

ou

$$\text{constante} = m \, r^2 \, \dot{f} = \sigma, \tag{2.12}$$

porque é possível demonstrar que

$$\sigma = m \, r^2 \, \dot{f}$$

a partir do produto vetorial $\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge m \, \dot{\vec{r}}$.

A Equação 2.12 mostra que o momento angular se conserva.

Arranjando-se a Equação 2.12, tem-se:

$$m \, r^2 \, \frac{df}{dt} = \sigma,$$

portanto

$$\frac{df}{dt} = \frac{\sigma}{m \, r^2} \, .$$

donde

$$\frac{d}{dt} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{d}{df},$$

ou

$$\frac{df}{dt} = \frac{\sigma}{m\, r^2} \cdot \frac{d}{dt}, \tag{2.13}$$

que, derivando-se mais uma vez, no tempo, vem:

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma\, d}{m\, r\, df}\right) \tag{2.14}$$

Substituindo-se $\dot{f}$ da Relação 2.12 na Relação 2.10, encontra-se

$$mr^2\dot{f} = \sigma \longrightarrow \dot{f} = \frac{\sigma}{mr^2}$$

$$\frac{F(r)}{m} = \ddot{r} - r\dot{f}^2 = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{\sigma}{mr^2}\right)^2 = \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{r\sigma^2}{m^2r^4} \tag{2.15}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{F(r)}{m} + \frac{\sigma^2}{m^2r^3}$$

Operando-se em r com a Equação 2.14 obtém-se

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{\sigma}{mr^2} \cdot \frac{d}{df}\left(\frac{\sigma}{mr^2}\,\frac{dr}{df}\right) \tag{2.16}$$

que igualada com a Expressão 2.15 e efetuando-se a mudança de variáveis

$$u = \frac{1}{r} \longrightarrow \left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{dr}{df} = -\frac{d}{df}\left(\frac{1}{r}\right)$$

pode escrever

$$\frac{\sigma^2u^2}{m}\left(\frac{d^2u}{df^2} + u\right) = -F(u)$$

e definindo

$$G \triangleq \frac{\sigma}{m},$$

tem-se

$$m\, G^2\, u^2 \left(\frac{d^2u}{df^2} + u\right) = -F(u) \tag{2.17}$$

que é reconhecida por "equação de Binet" e é de grande importância para o estudo do movimento no plano (campo central), pois, dado qualquer campo de força central, pode-se imediatamente, através da equação de Binet, determinar a forma da trajetória do corpo em tal campo.

3. Leis fundamentais da Mecânica Celeste

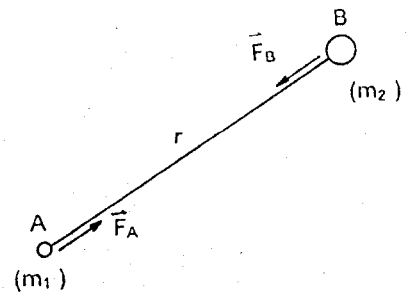
3.1. Lei da gravitação universal

A lei universal da gravitação, também conhecida como lei de Newton, foi enunciada em 1687 por Sir Isaac Newton em seu trabalho "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*", especificando a natureza das forças que agem em um sistema material.

A lei: Duas partículas A e B de massas m_1 e m_2 atraem-se mutuamente segundo a linha AB, com força diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa.

Se $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}| = r$, então a força que age em A devido a B e aquela que age em B devido a A terão como módulo

$$k = \left(\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}\right),$$



onde k é uma constante de proporcionalidade, chamada "Constante Universal da Gravitação":

$k = 6,670 + 0,005 \times 10^{-8}$ dyn.cm^2/g^2 no sistema cgs,

ou

$k = 0,000295912208266$ u.a. no sistema astronômico.

Pode-se, então, escrever:

$$F_B = k\, m_2\, m_1\, \frac{\overrightarrow{BA}}{r^3}$$

e (2.18)

$$F_A = k\, m_1\, m_2\, \frac{\overrightarrow{AB}}{r^3}\ .$$

Deve-se notar que a lei de Newton trás, como consequência, a transmissão instantânea da força através do espaço, além de ser válida apenas para massas pontuais (pontos materiais), não sendo aplicada no caso de corpos de dimensões finitas. Entretanto, é possível mostrar que corpos com simetria esférica atraem-se como se suas massas estivessem concentradas em seus respectivos centros. No caso de corpos com distribuição de massa não esférica sua atração mútua pode-se aproximar daquela, de quando as dimensões dos corpos possam ser consideradas pequenas em relação às distâncias que os separam.

No sistema solar, todos os corpos, quando tomados em relação ao Sol, podem ser assumidos como pontuais. Considerando-se o sistema Terra-Lua, ou o caso de alguns satélites naturais em relação com seus planetas, como o quinto satélite de Júpiter, a não esfericidade deve ser levada em conta.

3.2. Leis de Kepler

Bem antes da lei universal da gravitação, foram enunciadas as três leis de Kepler.

1ª Lei (1605):

As órbitas percorridas pelos planetas são elípses e o Sol ocupa um dos focos.

Esta lei mostra que a força deve ser atrativa, pois a órbita em relação ao Sol é côncava, além de revelar ser necessário que a força seja

inversamente proporcional ao quadrado da distância que separa o planeta do Sol

2ª Lei (1605):

Os planetas movem-se sobre curvas planas e seus raios vetores varrem áreas iguas em tempos iguais, isto é,

$$\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{f} = \text{constante}, \tag{2.19}$$

onde A é a área varrida; $\vec{r}$, o raio vetor com origem no Sol; e f, a anomalia verdadeira, conforme a Figura 2.4.

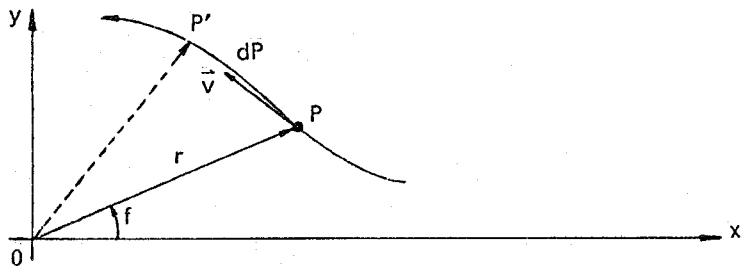


Fig. 2.4 - 2ª lei de kepler

Desta lei pode-se concluir que a força que mantém o movimento age sobre a linha que une o planeta ao Sol.

3ª Lei (1618):

O quadrado dos períodos de revolução dos planetas em torno do Sol estão um para o outro como os cubos dos semi-eixos maiores de suas órbitas, isto é

$$\frac{a_1^3}{P_1^2} = \frac{a_2^3}{P_2^2} = \ldots, \tag{2.20}$$

onde a_i são os semi-eixos maiores das órbitas e P_i os períodos.

Desta lei fica explícito que a força deve ser diretamente proporcional às massas dos planetas, e isto pode ser percebido de forma mais clara quando a lei é escrita da seguinte maneira

$$\frac{k\,(M + m_1)\,P_1^2}{k\,(M + m_2)\,P_2^2} = \frac{a_2^3}{a_2^3} = \ldots, \tag{2.21}$$

onde M indica a massa do Sol e os índices 1 e 2 referem-se a dois planetas. Como as massas planetárias são muito pequenas em relação à massa solar, a fórmula praticamente se confunde com a lei original de Kepler, mesmo no caso do planeta Júpiter, cuja massa é cerca de mil vezes menor que a do Sol.

A 3ª lei pode também assumir a forma

$$n^2\,a^3 = k\,(M + m), \tag{2.22}$$

onde $\mu = k\,(M + m)$ é chamado parâmetro gravitacional,

e $n = \dfrac{2\pi}{P}$ é chamado período anomalístico (2.23)

donde se tira a expressão

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\ . \tag{2.24}$$

Deve-se notar que as leis de Kepler são válidas apenas para o problema dos dois corpos e sob as mesmas condições que a lei universal da gravitação. Porém, para um estudo não muito acurado dos planetas e seus movimentos, estas leis podem e devem ser usadas.

4. Movimento Kepleriano

4.1. O problema dos dois corpos

Dadas duas massas m_1 e m_2 situadas nos pontos P_1 e P_2 de um sistema inercial de coordenadas de origem O, conforme a Figura 2.5, as forças que atuam nas massas são

$$\vec{F}_1 = m_1\,\frac{d^2\,(\overrightarrow{OP}_1)}{dt^2} = \frac{km_1\,m_2\,\overrightarrow{P_1P_2}}{|\overrightarrow{P_1P_2}|^3} \tag{2.25}$$

e

$$\vec{F}_2 = m_2 \frac{d^2(\overrightarrow{OP}_2)}{dt^2} = \frac{km_2 m_1 \overrightarrow{P_2P_1}}{|\overrightarrow{P_2P_1}|^3} \tag{2.26}$$

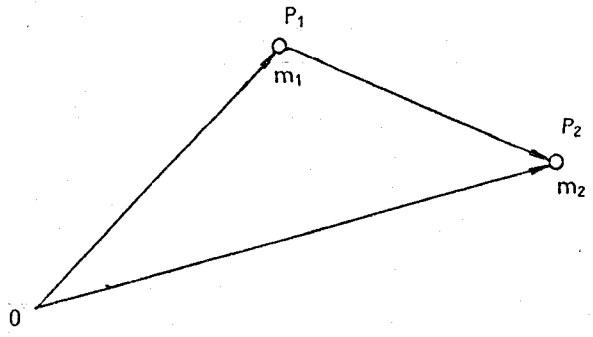


Fig. 2.5 - O problema dos dois corpos

Também da Figura 2.5, tem-se que

$$\overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP}_2 \tag{2.27}$$

e

$$m_1 \cdot \overrightarrow{OP}_1 + m_2 \overrightarrow{OP}_2 = 0, \tag{2.28}$$

onde a Equação 2.28 representa o momento das forças em relação ao centro de massa que, no caso, foi coincidente com a origem do sistema de coordenadas. Das Expressões 2.27 e 2.28 tira-se

$$\overrightarrow{P_1P_2} = -\frac{m_1 + m_2}{m_2} \cdot \overrightarrow{OP}_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot \overrightarrow{OP}_2, \tag{2.29}$$

que, substituídas nas Equações 2.25 e 2.26, e lembrando-se que $\overrightarrow{P_1P_2} = -\overrightarrow{P_2P_1}$, encontra-se:

$$\frac{d^2 \overrightarrow{OP}_1}{dt^2} = -k \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{\overrightarrow{OP}_1}{|\overrightarrow{OP}_1|^3} \tag{2.30}$$

e

$$\frac{d^2 \overrightarrow{OP}_2}{dt^2} = -k \frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{\overrightarrow{OP}_2}{|\overrightarrow{OP}_2|^3}. \tag{2.31}$$

Estas expressões revelam que:

"Cada corpo é atraído na direção do centro de gravidade do sistema como se a massa

$$M = \frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2}$$

estivesse concentrada naquele ponto".

Substituindo-se agora a Expressão 2.29 nas Expressões 2.25 e 2.26, porém, de forma a eliminar $\overrightarrow{OP}_1$ e $\overrightarrow{OP}_2$, vem

$$\frac{d^2 \overrightarrow{P_1P_2}}{dt^2} = -k\,(m_1 + m_2)\,\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{|\overrightarrow{P_1P_2}|^3} \qquad (2.32)$$

Colocando-se $\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{r}$ e $k(m_1 + m_2) = \mu$, tem-se

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\mu\,\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (2.33)$$

O problema dos dois corpos fica aqui reduzido ao problema de um corpo em que o movimento de um corpo, relativo ao outro, é devido à atração exercida por uma massa central igual à soma das massas dos dois corpos, agindo sobre a outra massa.

4.2. Solução para o problema de um corpo

Para resolver este problema utilizam-se dois outros princípios de conservação: o da conservação da energia e o da conservação do momento angular.

Pela conservação da energia tem-se:

$$\frac{1}{2}\,mv^2 + U(r) = \text{constante},$$

cuja derivada é

$$d\left(\frac{1}{2}\,mv^2\right) + dU = 0,$$

$$\text{mas } \vec{F} = -\frac{dU}{d\vec{r}},$$

logo $$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -\vec{F} \cdot \vec{v}\, dt$$

Assim, tem-se $$d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) - \vec{F} \cdot \vec{v}\, d t = 0, \tag{2.34}$$

ou $$\frac{1}{2} mv^2 - \int\left(-\frac{\mu . m}{r^2}\right) \frac{dr}{dt} dt = E' \text{ (energia)}$$

ou ainda

$$v^2 = 2E + \frac{2\mu}{r}, \tag{2.35}$$

onde $E = \frac{E'}{m}$ é a energia por unidade de massa.

Mas

$$v^2 = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr^2 + r^2\, df^2}{dt^2}, \tag{2.36}$$

e da expressão $m r^2 \dot{f} = \sigma = \text{constante}$ vem

$$r^2 \frac{df}{dt} = \frac{\sigma}{m} = G \text{ (momento angular específico)} \tag{2.37}$$

Eliminando-se dt nas Expressões 2.36 e 2.37 obtém-se

$$\frac{dr^2}{r^4\, df^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{2\mu}{G^2 r} - \frac{2E}{G^2} = 0 \tag{2.38}$$

Fazendo-se $u = \frac{1}{r} - \frac{\mu}{G^2}$ encontra-se

$$\left(\frac{du}{df}\right)^2 + u^2 = \left(\frac{\mu^2}{G^4} + \frac{2E}{G^2}\right) = \beta^2, \tag{2.39}$$

portanto,

$$\frac{du}{\sqrt{\beta^2 - u^2}} = df,$$

ou,

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{G^2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2G^2E}{\mu^2}}\ .\ \cos\ (f - f_o)\right] \qquad (2.40)$$

Definindo-se:

$$(a)\ p = \frac{G^2}{\mu}; \qquad (b)\ e = \left(1 + \frac{2G^2E}{\mu^2}\right)^{1/2}; \qquad (c)\ v = f - f_o; \qquad (2.41)$$

encontra-se

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\ .\ \cos v}{p}, \qquad (2.42)$$

que é conhecida como "equação geral das cônicas", onde "e" (excentricidade) e "p" ("semi latus rectum") são funções da energia total (E) e do momento angular específico (G) , e podem ser calculadas em qualquer ponto da órbita.

Substituindo-se a Expressão 2.41(a) na 2.41(b) tem-se

$$e = \left(1 + \frac{2\ p\ E}{\mu}\right)^{1/2},$$

donde

$$2E = -(1 - e^2)\ \frac{\mu}{p} = -\ \frac{\mu}{a}, \qquad (2.43)$$

sendo $p = a\ (1 - e^2)$ demonstrado mais adiante.

Substituindo-se a Relação 2.43 na 2.35, esta pode agora ser escrita na forma

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), \qquad (2.44)$$

onde "a" é o semi-eixo maior da elipse orbital.

5) Propriedades das órbitas elípticas, parabólicas e hiperbólicas

5.1) Curvas de Energia Potencial Gravitacional

Os gráficos da energia potencial "U" pela distância "r" em problemas de forças centrais são muito úteis para a compreensão do movimento de uma partícula.

Considere-se uma energia potencial U(r), que corresponde a uma força atrativa, para qualquer distância r, isto é,

$$F(r) = - \frac{\partial U(r)}{\partial r} ,$$

onde F(r) é negativa e U(r) é uma função crescente, conforme indica a curva (a) da Figura 2.6. A energia potencial cetrífuga $U_c(r)$ está indicada pela curva (b). O termo devido a $U_c(r)$ é pequeno para distâncias grandes, mas cresce rapidamente quando a partícula se aproxima da origem. Em muitas situações reais, a energia potencial é o termo dominante para pequenas distâncias, disto resultando uma energia efetiva

$$U_{ef}(r) = U_c(r) + U(r),$$

com a forma indicada pela curva (c) da Figura 2.6

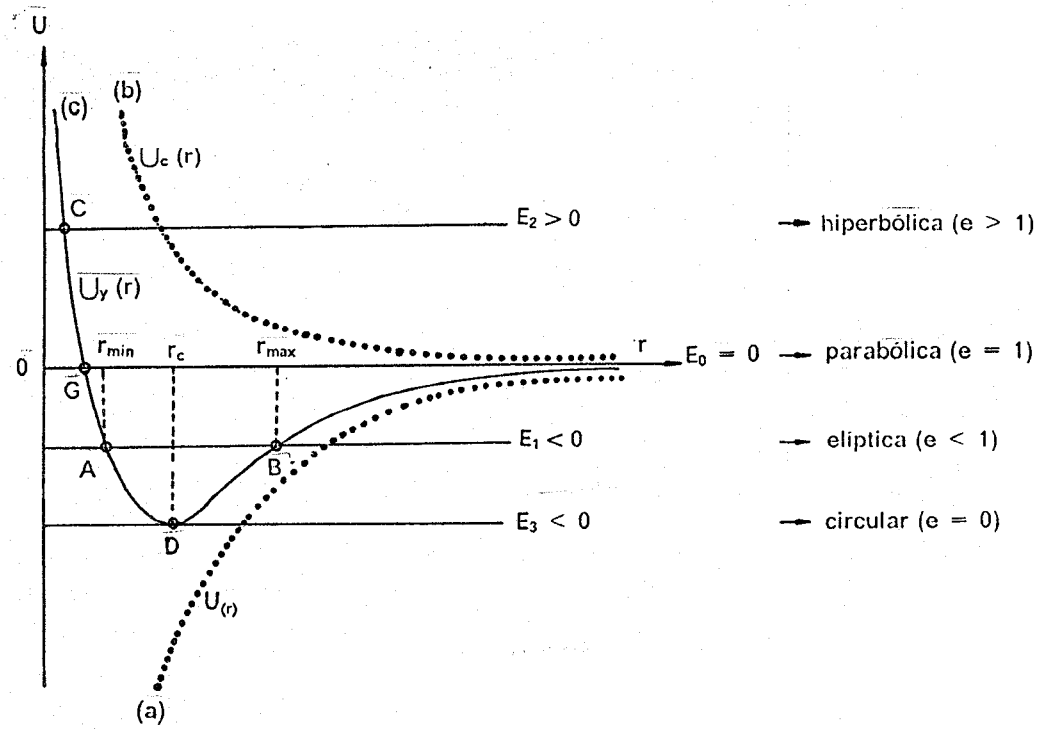


Fig 2.6 - Relações de energia para movimentos sob a ação de forças centrais

A energia efetiva U_{ef} pode ser obtida a partir das expressões já vistas:

$$m\,(\ddot{r} - r\dot{f}^2) = F(r) \qquad \text{(força radial)}$$

$$m\,(r\ddot{f} + 2\,\dot{r}\,\dot{f}) = 0 \qquad \text{(força transversal)}$$

$$m\ddot{r} = F(r) + mr\dot{f}^2, \tag{2.45}$$

que pode ser escrita da forma abaixo:

$$F' = F + mr\dot{f}^2.$$

Já viu-se que $mr^2\dot{f} = \text{constante} = \sigma$

$$\therefore \quad \dot{f} = \frac{\sigma}{mr^2} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{f}^2 = \frac{\sigma^2}{m^2r^4},$$

logo $$F' = F + mr\,\frac{\sigma^2}{m^2r^4} = F + \frac{\sigma^2}{mr^3}, \text{ que}$$

integrando, resulta $$U'(r) = U(r) + \frac{1}{2}\,\frac{\sigma^2}{mr^2}, \tag{2.46}$$

onde $$U'(r) = U_{ef}(r) \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}\,\frac{\sigma^2}{mr^2} = U_c(r).$$

Então, na Figura 2.6, quando a energia total por unidade de massa "E" da partícula é indicada pela reta horizontal E_1, o raio da órbita oscila entre os valores mínimo e máximo, r_{min} e $r_{máx}$ respectivamente, e a órbita tem a forma de uma roseta, em geral como indica a Figura 2.7. Portanto, quando o domínio de variação de r está entre r_{min} e $r_{máx}$, o movimento da partícula é finito, e a trajetória permanece no interior do anel limitado pelos círculos definidos por r_{min} e $r_{máx}$. Porém, isto não significa obrigatoriamente que a órbita seja fechada. Durante o tempo que r leva para ir do $r_{máx}$ para r_{min} e novamente ao $r_{máx}$, o raio vetor desloca-se de um ângulo $\Delta\phi$.

Para que a órbita seja fechada, é condição suficiente e necessária que o ângulo seja uma fração racional de 2π, isto é,

$$\Delta\phi = \frac{2\pi m}{n} ,$$

onde m e n são números inteiros.

Isto significa que, após "n" períodos, o raio vetor do ponto avança "m" voltas inteiras e retorna ao ponto inicial, e a trajetória fica fechada. No caso limite, quando a energia E corresponde ao ponto mínimo D de $E_{ef}(r)$, indicado pela reta E_3, a partícula descreve uma órbita circular de raio r_0.

Quando a energia E for positiva ou nula, como no caso das retas E_2 e E_0, a órbita será ilimitada e aberta, a partícula possuirá energia suficiente para desaparecer no infinito. A diferença entre órbitas limitadas e ilimitadas depende do fato da energia E ser negativa ou não, respectivamente; para o caso gravitacional isto é sempre verdadeiro.

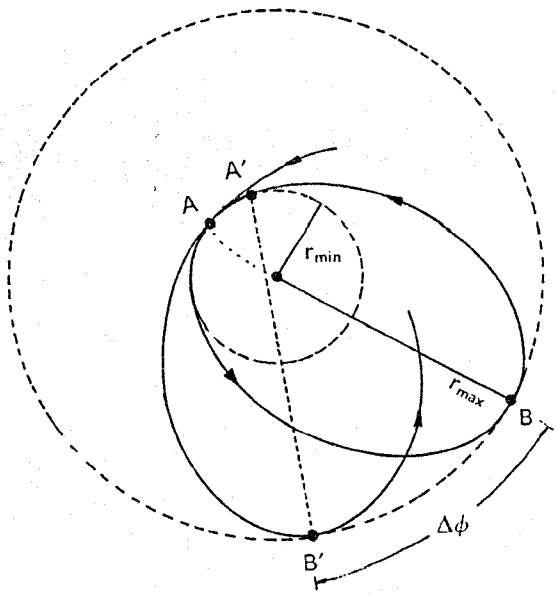


Fig 2.7 - Trajetória elíptica- Forma geral de uma trajetória limitada devido a forças centrais, E < 0.

5.2 - O problema de Kepler

Para analisar os tipos de órbitas em função da energia e da

excentricidade, tome-se a expressão da força gravitacional

$$F = - \frac{kMm}{r^2} . \qquad (2.47)$$

Seja a equação de Binet

$$m\, G^2 u^2 \left(\frac{d^2u}{df^2} + u \right) = F\,(u),$$

onde $u = \frac{1}{r}$ e $G = \frac{\sigma}{m}$.

Substituindo a força na equação de Binet, vem

$$\frac{m\, G^2 u^2}{1} \left(\frac{d^2u}{df^2} + u \right) \mu\, mu^2,$$

logo

$$\frac{d^2u}{df^2} + u = \frac{\mu}{G^2} \qquad (2.48)$$

Fazendo-se uma mudança de variável, onde

$$y = u - \frac{\mu}{G^2} ,$$

a equação fica:

$$\frac{d^2y}{df^2} + y + \frac{\mu}{G^2} = \frac{\mu}{G^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{df^2} + y = 0,$$

a qual tem solução $y = b \,.\, \cos(f - f_0)$, onde b e f_0 são as duas constantes de integração. Em termos de r a solução fica:

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{G^2} + b \cos (f - f_0), \text{ ou, explicitando } \frac{\mu}{G^2} \text{ , fica}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{G^2} \left[1 + \frac{bG^2}{\mu} \,.\, \cos(f - f_0) \right] ,$$

donde se conclui que

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{G^2}\left[1 + e\ \cos(f - f_0)\right], \tag{2.49}$$

onde $$e = \frac{bG^2}{\mu} \equiv \frac{B}{\mu}. \tag{2.50}$$

Comparando-se a Equação 2.49 com a 2.40, conclui-se que "e" pode ser escrita da forma

$$e = \left(1 + \frac{2G^2E}{\mu^2}\right)^{1/2}. \tag{2.51}$$

Comparando-se as Equações 2.50 e 2.51, tem-se:

$$1 + \frac{2EG^2}{\mu^2} = \frac{B^2}{\mu^2}$$

$$\mu^2 + 2\,EG^2 = B^2$$

$$\therefore \quad E = \frac{B^2 - \mu^2}{2G^2}. \tag{2.52}$$

Na Equação 2.52, μ é positivo, o sinal da energia E é governado pelo valor de B; se $B > \mu$, a partícula pode desaparecer no infinito com velocidade finita como mostra a Figura 2.8, e a trajetória é um dos ramos de uma hipérbole, com a origem no foco interno.

Se $B = \mu$, a energia é zero, a velocidade no infinito é nula e a órbita é uma parábola como mostra a Figura 2.9.

Finalmente, se $B < \mu$, a energia é negativa e a órbita é uma elipse, como já foi visto na Figura 2.7, e,se B = 0, a energia atinge seu menor valor, compatível com o valor de G, e a órbita será circular.

$$e = \frac{B}{\mu} \begin{cases} B > \mu \Rightarrow e > 1 \; ; \; E > 0 \text{ (hipérbole)} \\ B = \mu \Rightarrow e = 1 \; ; \; E = 0 \text{ (parábola)} \\ B < \mu \Rightarrow e < 1 \; ; \; E < 0 \text{ (elípse)} \\ B = 0 \Rightarrow e = 0 \; ; \; E = -\frac{\mu^2}{2G^2} \text{ (círculo)} \end{cases}$$

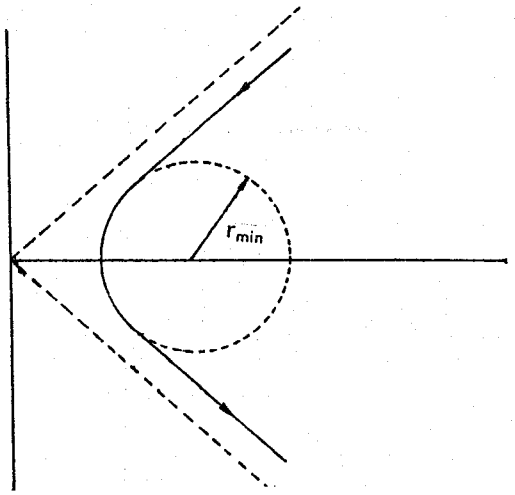


Fig 2.8 - Trajetória hiperbólica (trajetória de uma partícula sob a ação de uma força central para $B > \mu$, isto é, $E > 0$.

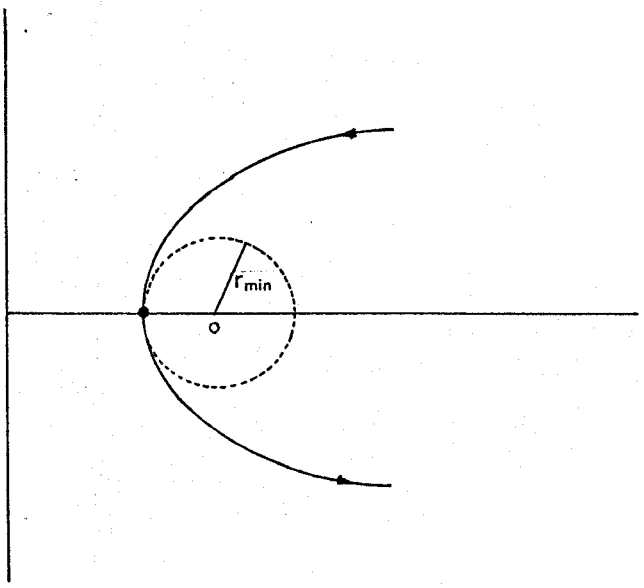


Fig 2.9 - Trajetória parabólica (trajetória de uma partícula sob a ação de uma força central para $B = \mu$, isto é, $E = 0$.

Convém notar que a Equação 2.49 pode ser colocada sob a forma da equação geral das cônicas:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos (f - f_0)} ,$$

onde

$$p = \frac{G^2}{\mu}$$

Como o semi-parâmetro "p" toma o valor de r para

$$f = f_0 \pm \frac{\pi}{2}$$

e é independente de B, e portanto, da energia, ele depende somente do momento angular.

5.3 Movimento elíptico

Para estudar o movimento elíptico de uma partícula introduzem-se as variáveis angulares: anomalia verdadeira "f" e anomalia excêntrica "u", conforme mostra a Figura 2.10.

O segmento $\overline{OP} = \overline{OB'} = a$ é o semi-eixo maior da elípse orbital, $\overline{OQ} = b$ é o semi-eixo menor, e $\overline{OF} = c$ é a distância focal, que também é dada por $c = a\,e$.

Das propriedades da elipse, tem-se:

$$b = a\,(1 - e^2)^{1/2}$$

Se

$$\begin{cases} FP' = r_{máx} = a + c \\ FP = r_{mín} = a - c \end{cases} ,$$

então:

$$\begin{cases} r_{máx} + r_{mín} = 2a \\ r_{máx} - r_{mín} = 2c \end{cases} ,$$

donde

$$e = \frac{r_{máx} - r_{mín}}{r_{máx} + r_{mín}} .$$

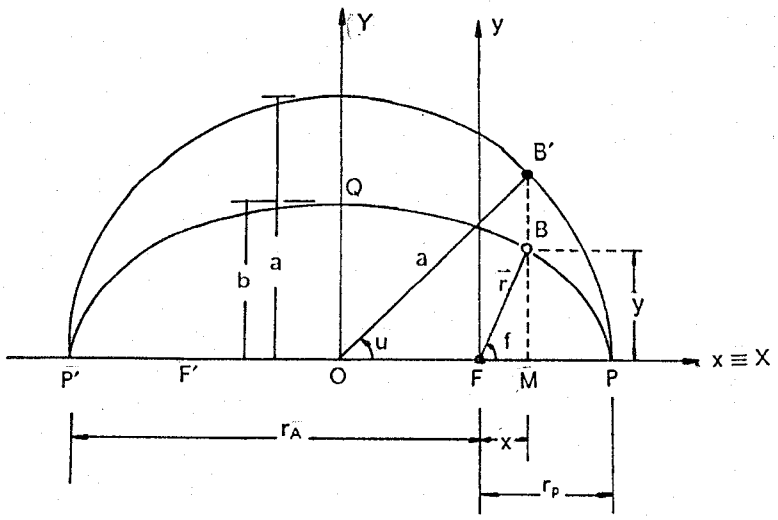


Fig 2.10 - **Anomalias verdadeira e excêntrica**. Elipse circunscrita, definindo a anomalia verdadeira f e a anomalia excêntrica u.

Da Equação 2.42, tem-se:

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \nu} \quad \text{ou} \quad = \frac{p}{1 + e \cdot \cos f}$$

$$\begin{cases} p = r_{máx} \ (1 - e), \text{ no apogeu, e} \\ p = r_{mín} \ (1 + e), \text{ no perigeu,} \end{cases}$$

$$p = a \ (1 - e^2) \tag{2.54}$$

Para o movimento elíptico, deduz-se facilmente da Figura 2.10, que as coordenadas de uma partícula em função de parâmetros da órbita (elípse) são dados por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos f \\ \text{sen } f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \ (\cos u - e) \\ a \ (1 - e^2)^{1/2} \ \text{sen } u \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

e

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} = a \ (1 - e \cos u) \tag{2.56}$$

Definindo-se as Equações 2.55 e 2.56 em função do tempo, tem-se:

$$\dot{x} = \dot{r} \cdot \cos f - r\dot{f} \ \text{sen } f = - a \ \dot{u} \ \text{sen } u$$

$$\dot{y} = \dot{r} \text{ sen } f + r\dot{f} \cos f = a\dot{u} \left(1 - e^2 \right)^{1/2} \cos u \qquad (2.57)$$

e $$v = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2} \qquad (2.58)$$

A partir das Equações 2.55 e 2.56 deduz-se que

$$\cos f = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u}$$

Tomando-se a relação trigonométrica

$$tg^2 \left(\frac{f}{2} \right) = \frac{1 - \cos f}{1 + \cos f}$$

e substituindo-se $\cos f = \dfrac{\cos u - e}{1 - e \cos u}$,

resulta em $$tg \left(\frac{f}{2} \right) = \left(\frac{1 + e}{1 - e} \right)^{1/2} tg \left(\frac{u}{2} \right). \qquad (2.59)$$

Tomando-se a Equação 2.37 (momento angular específico),

$$r^2 \dot{f} = \frac{\sigma}{m} = G,$$

e interpretando-a através da 2ª lei de Kepler ($r^2\dot{f} = 2\dot{A}$), tem-se

$$r^2 \frac{df}{dt} = 2 \frac{dA}{dt} = G \quad \text{ou} \quad r^2 df = 2\, dA = G\, dt$$

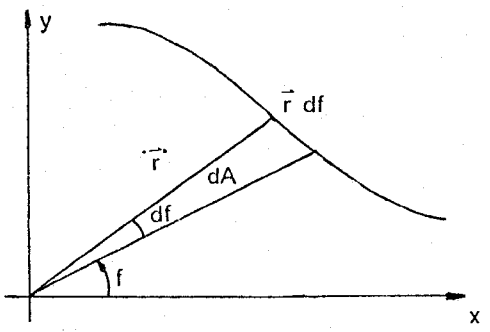


Fig 2.11 - Integral das áreas

$$dA = \frac{1}{2}\,\vec{r}\,.\,\vec{r}\,df\ ,$$

onde dA é o elemento de área varrida pelo raio vetor no instante de tempo dt, logo, a constante das áreas G é tal que

$$\int_0^{\pi} r^2 df = \frac{1}{2}\int_0^{P} G\,dt = \frac{GP}{2} = \pi\,a^2(1 - e^2)^{1/2}\ , \qquad (2.60)$$

pois a área de elipse é $\pi a^2(1 - e)^{1/2}$ e o período de revolução é P.

Assim

$$G^2 = p\,\mu = \mu\,a\,(1 - e^2)$$

$$\therefore\ G^2 = \mu\,a(1 - e^2) \qquad (2.61)$$

Assim:

$$\frac{G\,P}{2} = \pi\,a^2(1 - e^2)^{1/2}$$

$$\frac{G^2P^2}{4} = \pi^2a^4(1 - e^2)$$

$$\frac{P^2\mu a(1 - e^2)}{4} = \pi^2a^4\,(1 - e^2)$$

$$\therefore \qquad \frac{4\,\pi^2a^3}{P^2} = \mu, \qquad (2.62)$$

que é a 3ª lei de Kepler, obtida a partir da integral das áreas.

Em virtude da Equação 2.61, e tomando-se $f_0 = 0$, a Equação 2.42 pode ser escrita na forma:

$$r = \frac{p}{1 + e\,\cos\,v} = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e\,\cos\,f}\ , \qquad (2.63)$$

que pode ser colocada como

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a\,(1 - e^2)} + \frac{e\,\cos\,f}{a\,(1 - e^2)}\ ,$$

que, diferenciando-se em relação a f resulta:

$$r^2 df = \frac{a\,(1 - e^2)}{e \text{ sen } f}\, dr.$$

Substituindo-se "sen f" da Equação 2.55, e "r" e "dr" da Equação 2.56 resulta

$$r^2 df = a^2\,(1 - e^2)^{1/2}(1 - e \cos u)\, du = G\, dt$$

$$\text{Como } G = \left(\mu \,.\, p\right)^{1/2} = \left[\ \mu\ a\ (1 - e^2)\right]^{1/2},$$

então, integrando-se a equação acima do perigeu até um instante "t" vem:

$$a^{-3/2}\,\mu^{1/2} \int_{t_p}^{t} dt = \int_{0}^{u} (1 - e \cos u)\, du$$

Definindo-se $n \overset{\Delta}{=} \mu^{1/2}\ a^{-3/2}$ e $M \overset{\Delta}{=} n\,(t - t_p)$, vem

$$M = n\,(t - t_p) = u - e \text{ sen } u, \tag{2.64}$$

onde M é chamada de anomalia média, n é o movimento anomalístico médio e t_p é o instante da passagem pelo perigem. A equação transcendente 2.64 é conhecida por equação de Kepler.

Comparando-se $n = \mu^{1/2}\ a^{-3/2}$ com a 3ª lei de Kepler da Equação 2. 62, vê-se que

$$n = \frac{2\,\Pi}{P}\ .$$

Assim, a expressão

$$M = n(t - t_p)$$

permite interpretar M como sendo a anomalia de um satélite imaginário com velocidade angular uniforme.

FORMULÁRIO RESUMO

1) Movimento num campo central

$$\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge m\vec{v} \qquad \sigma = mr^2 \dot{f} \qquad \sigma = mr\ v\ \text{sen}\ f \qquad G = \sqrt{\mu p}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\dot{f}\,\hat{e}_f$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{f}^2)\,\hat{e}_r + (r\ddot{f} + 2\dot{r}\dot{f})\hat{e}_f \qquad G = \frac{\sigma}{m}$$

$$\begin{cases} F = m(\ddot{r} - r\dot{f}^2) & \text{(radial)} \\ 0 = (r\ddot{f} + 2\dot{r}\dot{f})m & \text{(transversal)} \end{cases}$$

$$F(u) = m\sigma^2 u^2\left[\frac{d^2u}{df^2} + u\right], \qquad u = \frac{1}{r} \qquad \text{(Equação de Binet)}$$

2) Equações cônicas

$$r = \frac{p}{1 + e\cos f} = \frac{\frac{G^2}{\mu}}{1 + \frac{B}{\mu}\cos f} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos f}$$

$$\mu = \frac{G^2}{a(1 - e^2)} \qquad e = \frac{B}{\mu} \qquad a(1 - e^2) = r\,(1 + e\cos f)$$

$$p = a\,(1 - e^2) = \frac{\sqrt{(1 - e^2)}}{na} = \frac{G^2}{\mu} \qquad E = \frac{B^2 - \mu^2}{2G^2}$$

$$G = \frac{2\pi\ ab}{P} = \frac{2\pi\ a^2\sqrt{(1 - e^2)}}{P}$$

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{P} \qquad n = \frac{2\pi}{P} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

$$\left.\begin{aligned} x = a(\cos u - e) \quad &= \frac{p \cos f}{1 + e \cos f} \\ y = a\sqrt{(1 - e^2)}\ \operatorname{sen} u \quad &= \frac{p \operatorname{sen} f}{1 + e \cos f} \end{aligned}\right\} \; r \cos f = a(\cos u - e)$$

$$M = n(t - t_p) = u - e \operatorname{sen} u \qquad \text{(Equação de Kepler)}$$

$$u_o = M + e \operatorname{sen} M$$

$$r = a(1 - e \cos u)$$

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{f}{2}\right) = \left(\frac{1 + e}{1 - e}\right) \operatorname{tg}^2\left(\frac{u}{2}\right) \iff \begin{cases} \operatorname{sen} f = \dfrac{\sqrt{1 - e^2}\ \operatorname{sen} u}{1 - e \cos u} \\ \operatorname{sen} u = \dfrac{\sqrt{1 - e^2}\ \operatorname{sen} f}{1 + e \cos f} \\ \cos f = \dfrac{\cos u - e}{1 - e \cos u} \\ \cos u = \dfrac{e + \cos f}{1 + e \cos f} = \dfrac{r \cos f}{a} + e \end{cases}$$

$$r_{apogeu} = a(1 + e)$$

$$r_{perigeu} = a(1 - e)$$

$$\vec{r} = a\left[\left(\cos u - e\right)\hat{i} + \left(\sqrt{1 - e^2}\ \operatorname{sen} u\right)\hat{j}\right] = r \cos f \hat{i} + r \operatorname{sen} f \hat{j}$$

$$\vec{v} = \frac{\sqrt{\mu a}}{r}\left[\left(-\operatorname{sen} u\right)\hat{i} + \left(\sqrt{1 - e^2}\ \cos u\right)\hat{j}\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left[-\operatorname{sen} f \hat{i} + \left(e \cos f\right)\hat{j}\right]$$

$$v_{apogeu} = \frac{\sqrt{\mu a\ (1 - e^2)}}{a(1 + e)} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}\ \sqrt{\frac{\mu}{a}}$$

$$v_{perigeu} = \frac{\sqrt{\mu a\ (1 - e^2)}}{a(1 - e)} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\ \sqrt{\frac{\mu}{a}}$$

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \Rightarrow \text{Energia mecânica específica} \Rightarrow E = -\frac{\mu}{2a}$$

(Integral da energia)

$$e = \sqrt{1 + \frac{2 E G^2}{\mu^2}} \qquad p = \frac{G^2}{\mu}$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

3) Movimento elíptico, Propriedades da elípse

$$\left.\begin{aligned} c &= a\ e \\ c^2 &= a^2 - b^2 \\ b &= a(1 - e^2)^{1/2} \end{aligned}\right\} \text{(Ver Figura 2.10)}$$

$$\left.\begin{aligned} r_a + r_p &= 2a \\ r_a - r_p &= 2c \end{aligned}\right\} \quad e = \frac{c}{a} = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f} \qquad \left\{\begin{aligned} r_a &= \frac{p}{1 - e} \\ r_p &= \frac{p}{1 + e} \end{aligned}\right\} \quad p = a(1 - e^2)$$

$$fa = \frac{a - b}{a} \; ; \quad e^2 = 2\,fa - fa^2$$

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) = \frac{1 - e}{1 + e} \cdot \frac{\mu}{a} \qquad \text{(velocidade)}$$

componentes da velocidade

$$\dot{x} = -\sqrt{\frac{\mu}{a}} \cdot \frac{\text{sen } u}{1 - e \cos u} = -\sqrt{\frac{\mu}{a}} \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \frac{\text{sen } f}{1 - e^2}$$

$$\dot{y} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \frac{\text{sen } u}{1 - e \cos u} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \frac{e + \text{sen } f}{1 - e^2}$$

4) Constantes

Parâmetro gravitacional : $k(M_T + m) \equiv kM_T$

onde $\begin{cases} M_T = \text{massa da terra} \\ m = \text{massa do satélite} \\ k = \text{constante gravitacional} \end{cases}$

$$\mu = kM_T = \begin{cases} 1,407.646.882 \times 10^{16}\ ft^3/seg^2 \\ 3,986.012 \times 10^5\ km^3/seg^2 \end{cases}$$

Exercícios de aplicação

1 - Um satélite artificial tem sua órbita com excentricidade e = 0,1 e altura do perigeu 300 km. Determinar a altura do apogeu, a energia total específica, o momento angular específico e o período orbital. Utilizar as seguintes constantes:

r_T(raio da Terra) = 6.400 km

$\mu = 398.603\ km^3/seg^2$.

Solução

i) $r_p = r_T + h_p = 6400 + 300 = 6700$ km

$p = r_P(1 + e) = 6700(1,1) = 7.370$ km

No apogeu $\Rightarrow r_a = \dfrac{p}{1 - e} = \dfrac{7.370}{0,9} = 8.189$ km

$\Rightarrow$ altura do apogeu $\Rightarrow h_a = r_a - r_T =$ **1.789 km**

ii) momento angular específico

$$G = \sqrt{\mu\, p} = \sqrt{398.603 \times 7.370}\ \frac{km^3}{seg^2} \times Km = \boxed{54.201\ \frac{km^2}{seg}}$$

iii) energia total específica

$$E = -\frac{\mu}{2a} \Rightarrow \text{mas} \quad a = \frac{r_a + r_p}{2} = 7.445 \text{ km}$$

$$\therefore E = -\frac{398.603}{2 \times 7.445} = \boxed{-26,77 \frac{km^2}{seg^2}}$$

iv) período orbital

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = \boxed{106,55 \text{ minutos}}$$

2) Para um dado satélte, conhece-se a excentricidade e = 0,2 e a energia total específica E = - 2,0,× 10^8 ft^2/sec^2. Determinar seu momento angular específico, o semi-latus rectum, o semi-eixo maior e a velocidade, quando a anomalia excêntrica for 30°.

Solução

Dados: E, e, u, μ. Pede-se G, p, a, v.

i) Momento angular específico

$$G^2 = \mu p = \mu a(1 - e^2)$$

$$\text{mas } E = -\frac{\mu}{2a} \Rightarrow a = -\frac{\mu}{2E} \Rightarrow \mu = 1,407.646.882 \times 10^6 \frac{ft^3}{sec^2}$$

$$\therefore G^2 = -\mu \frac{\mu}{2E}(1 - e^2) = -\frac{\mu}{2E}(1 - e^2)$$

$$\therefore G^2 = \frac{+ (1,407646882 \times 10^6)^2 \left[1 - (0,2)^2\right]}{+ 2 \times 2,0 \times 10^8} = 4,755.527 \times 10^{23}$$

$$\therefore \boxed{G = 6,896.033 \times 10^{11} \frac{ft^2}{sec}}$$

ii) Semi-eixo maior

$$a = -\frac{\mu}{2E} = \frac{-(1{,}407646882 \times 10^{6})}{-2 \times 2{,}0 \times 10^{8}} \Rightarrow \boxed{a = 35.191.172{,}05 \text{ ft}}$$

iii) Semi-latus rectum

$$p = a(1 - e^{2}) = 35.191.172{,}05 \times \left[1 - (0{,}2)^{2}\right]$$

$$\therefore \boxed{p = 33.783.525{,}17 \text{ ft}}$$

iv) Velocidade

$$v^{2} = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \quad , \text{ mas } r = a\,(1 - e\cos u)$$

$$r = 35.191.172{,}05\left(1 - (0{,}2 \times \cos 30^{\circ})\right) = 29.095.882{,}25 \text{ ft}$$

$$\therefore \boxed{v = 23.824{,}185600 \text{ ft/sec}}$$

6. Sistema orbital de coordenadas.

6.1 Conceituação do sistema

O sistema orbital é usado para definir e calcular as coordenadas de um satélite orbitando ao redor da Terra. A trajetória de um corpo, movendo-se num campo central, descreve uma elípse, cujo centro de aplicação das forças se encontra em um dos seus focos. No caso de um satélite artificial orbitando ao redor da Terra, esta elípse é chamada "elípse orbital", e o centro de gravidade da Terra é um dos focos, conforme apresenta-se na Figura 2.12.

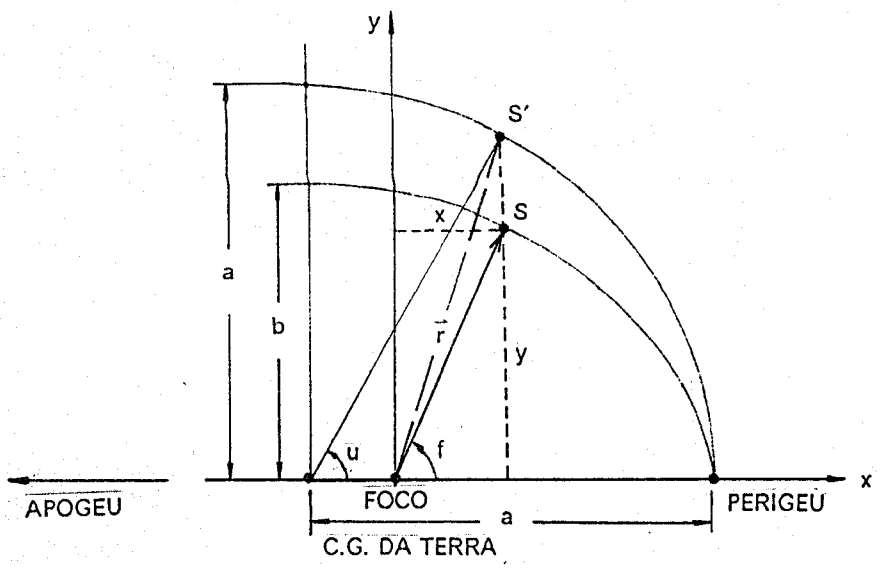


Fig. 2.12 - Anomalias orbitais

O ponto da órbita do satélite mais próximo da Terra é chamado perigeu, e o mais afastado é chamado apogeu. A reta que une esses pontos é a linha dos ápices. Sejam as anomalias orbitais, conforme mostra a Figura 2.12. A relação entre a anomalia verdadeira (f) e a anomalia excêntrica (u) é dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos f \\ \operatorname{sen} f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos u - ae \\ b \,.\, \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(\cos u - e) \\ a(1 - e^2)^{1/2} \,.\, \operatorname{sen} u \end{bmatrix} \qquad (2.65)$$

e a sua relação inversa pela expressão

$$\operatorname{tg} f = \frac{(1 - e^2)^{1/2} \operatorname{sen} u}{\cos u - e} \qquad (2.66)$$

A relação entre a anomalia excêntrica (u) e a anomalia média (M) é dada pela "Equação de Kepler"

$$M = u - e \operatorname{sen} u \,, \quad \text{ou} \quad u = M + e \operatorname{sen} u, \qquad (2.67)$$

que é uma Equação transcendente em (u).

Normalmente tem-se a anomalia média e deseja-se calcular a anomalia excêntrica, para daí calcular-se a anomalia verdadeira. Se a excentricidade for pequena, e não se desejar muito rigor, faz-se a aproximação

$$u = \bar{M} + e \text{ sen } u = \bar{M} + e \text{ sen } \bar{M}. + \frac{1}{2} e^2 \text{ sen } 2\,\bar{M}$$

Para um tratamento iterativo, tem-se

$$\bar{M} = (1 - e \,.\, \cos u) \,.\, \delta u$$

$$\delta u = \frac{\bar{M}}{1 - e \cos u}$$

Na prática, sendo dados "M_o" e "e", calcula-se, inicialmente,

$$u_o = \bar{M}_o + e \text{ sen } \bar{M}_o + \frac{1}{2} e^2 \text{ sen } 2\,\bar{M}_o,$$

depois, calcula-se iterativamente

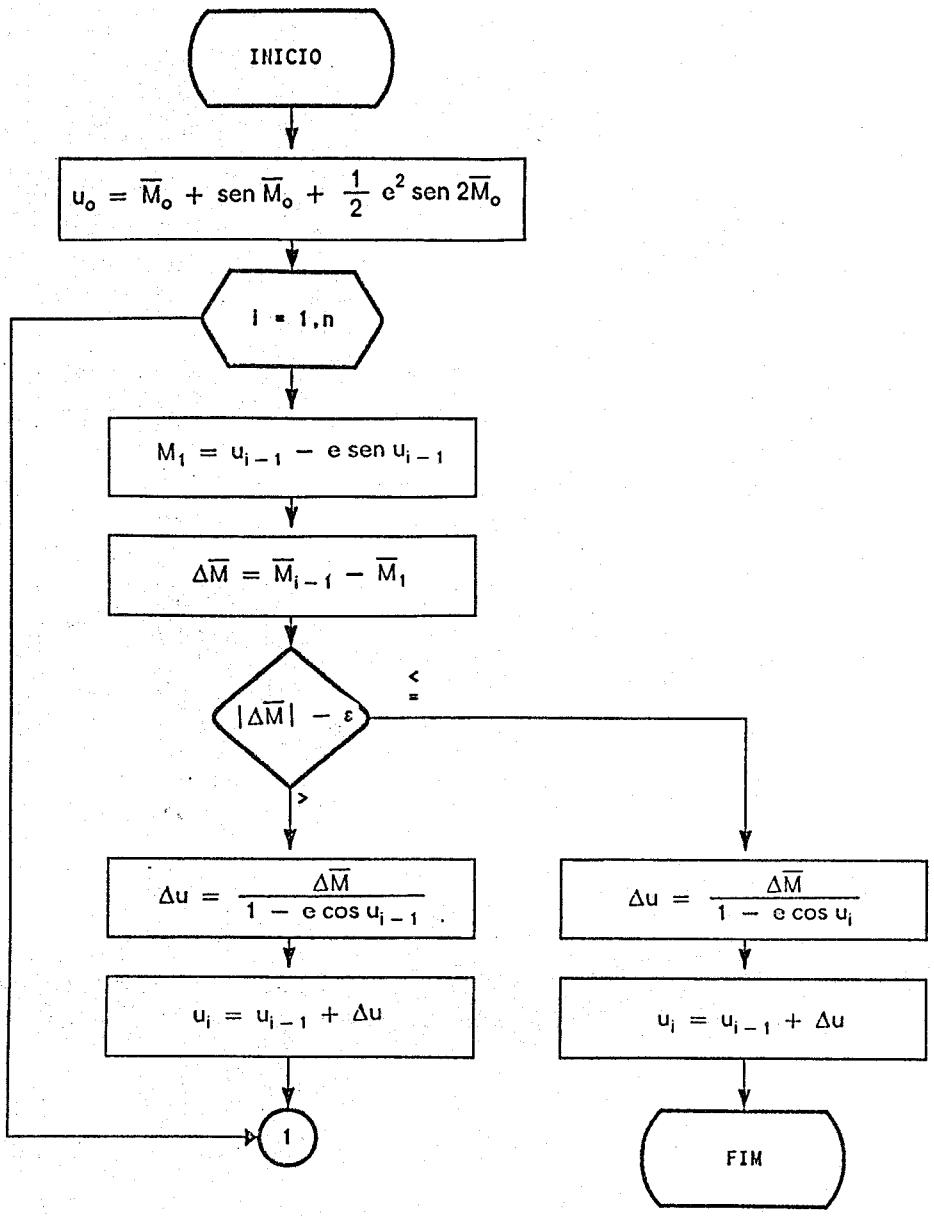
$$\bar{M}_i = u_i - e \text{ sen } u_i, \qquad i = 0,1,2,3,\ldots$$

$$\Delta \bar{M} = \bar{M} - \bar{M}_i$$

$$\Delta u = \frac{\Delta \bar{M}}{1 - e \cos u_i}$$

$$\therefore \; u_{i+1} = u_i + \Delta u \tag{2.68}$$

Um exemplo de fluxograma pode ser o seguinte:



Um exemplo de fluxograma pode ser o seguinte:

Define-se o Sistema Orbital da seguinte maneira:

- origem - no centro de gravidade da Terra;
- plano primário - plano orbital;
- polar primária - perpendicular ao plano orbital;
- eixo primário - linha dos ápices, na direção do perigeu;
- sistema direto - mão-direita

Um vetor posição de um satélite em órbita é dado pela expressão

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{ORB} = r \begin{bmatrix} \cos f \\ \text{sen } f \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(\cos u - e) \\ a(1 - e^2)^{1/2} \text{ sen } u \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.69)$$

Note-se que $z = 0$ porque o satélite artificial, por enquanto, será considerado dentro de sua órbita plana, ou seja, não são consideradas, até aqui, as perturbações orbitais.

6.2 Transformação do Sistema Orbital para o Sistema Terrestre Convencional

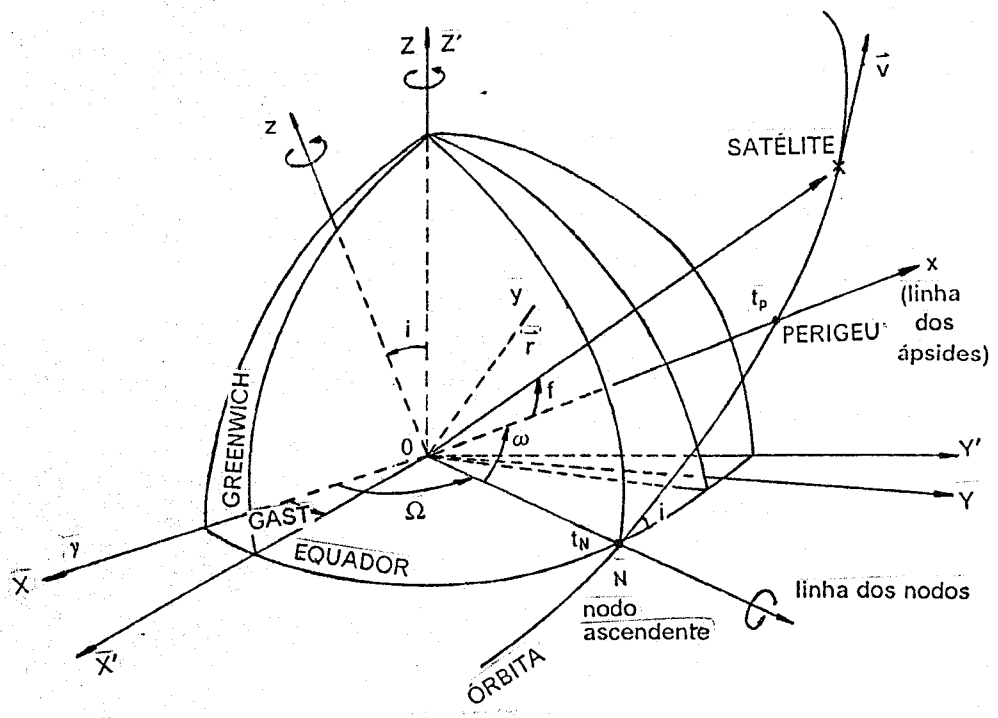


Fig. 2.13 - Elementos orbitais de um satélite artifcial

O plano orbital não gira com a Terra, mas permanece fixo, considerando-se um Sistema Celeste, orbitando com ela em seu movimento de translação.

Seja o Sistema Sideral Aparente, na Figura 2.13 o qual tem sua origem

no centro de massa da Terra, e está indicando seus eixos pelas letras (X,Y,Z). Ainda na mesma Figura, verifica-se que, quando o plano orbital é ampliado até encontrar a esfera celeste, ele intercepta o equador celeste num ponto denominado " nodo ascendente " (N), onde o satélite cruza o equador no sentido do sul para norte; o ângulo entre o equador celeste e o plano orbital é a " inclinação da órbita " (i); o ângulo entre a linha do nodo ascendente e a linha dos ápices, medido no plano orbital é o " argumento do perigeu " (ω); o ângulo entre o ponto vernal e o nodo ascendente, medido do equador celeste é chamado de " ascensão reta do nodo ascendente " (Ω).

A Transformação do Sistema Orbital (ORB) para o Sistema Sideral Aparente (SSA) é dada pela expressão

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{SSA} = R_z(-\Omega) \cdot R_x(-i) \cdot R_z(-\omega) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{ORB} \qquad (2.70)$$

Uma vez que a transformação do Sistema Sideral Aparente (SSA) difere do Sistema Terrestre Convencional (CTS) apenas pela rotação de seu plano secundário do ângulo GAST (Tempo Sideral Aparente Greenwich), a transformação do Sistema Orbital para o Terrestre Convencional fica.

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}_{CTS} = R_z(GAST) \cdot R_z(-\Omega) \cdot R_x(-i) \cdot R_z(-\omega) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{ORB} \qquad (2.71)$$

Como o ângulo GAST representa a ascensão reta do meridiano de Greenwich, sua derivada em relação ao tempo, representa a velocidade de rotação da Terra

$$\frac{d\ (GAST)}{dt} = \omega_{e.} \qquad (2.72)$$

6.3 Trajetórias

Sabe-se que a trajetória de um corpo sujeito a movimento central é descrita sobre um plano, e que, quando o campo de forças é um campo gravitacional, esta trajetória é uma cônica, cuja natureza depende da relação entre a velocidade inicial (v_0) e sua velocidade crítica ou de escape (v_e).

A velocidade crítica é dada por

$$v_c = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} \tag{2.73}$$

A Tabela 2.1 estabelece o tipo de cônica em função das velocidades inicial e de escape.

TABELA 2.1

TIPOS DE ÓRBITA EM FUNÇÃO DAS VELOCIDADES

RELAÇÃO	CÔNICA (ÓRBITA)
$v_0 = v_e / \sqrt{2}$	círculo
$v_e > v_0 > v_e / \sqrt{2}$	elípse
$v_0 = v_e$ (*)	párabola
$v_0 > v_e$	hipérbole
(*)A velocidade crítica também é conhecida como parabólica.	

Exercícios de aplicação

Sendo dados os elementos orbitais abaixo, calcular o instanteda última passagem pelo perigeu (t_p).

Dados: $a = 7.285.721$ m $\qquad \omega = 215,048999$ graus

$e = 0,001\ 307 \qquad M = 5,145396$ graus

$i = 99,032$ graus $\qquad P = 103,1493$ minutos

$\Omega = 145,383\ 999$ graus $\qquad t = 0^h$ de 26/03/90

Solução: Tem-se que $n = \dfrac{M}{t - t_p} = \dfrac{2\,\Pi}{P}$

Assim $n = \dfrac{2\,\Pi}{P} = \dfrac{2\Pi}{103,1493} = 0,0609135$ rad/min ,

portanto

$$t - t_p = \frac{M}{n} = \frac{5^{\circ},145396\ /\ \rho^0}{0,0609135\ /\ \text{rad/min}} = \frac{0,0898041\ \text{rad}}{0,0609135\ \text{rad/min}}$$

$\therefore\ t - t_p = 1,474289$ min $\cong 0^h,0245715$.

Como $t - t_p = 0^h,0245715 \Rightarrow t_p = t - 0,0245715$

$\therefore\ t_p = 24^h - 0^h,0245715 \Rightarrow$ $\boxed{t_p = 23^h,9754285,\ \text{de } 25/03/90}$

7. Posicionamento de satélites. Problema direto.

7.1 Elementos Keplerianos.

Os seis elementos que caracterizam uma órbita, num instante "t", chamados elementos Keplerianos da órbita, ou elementos orbitais, são

$$a,\ e,\ i, \omega,\ \Omega,\ M \quad \text{ou} \quad t_p,$$

conforme mostra a Figura 2.13.

- a = semi-eixo maior da elípse orbital
- e = excentricidade da elípse orbital
- i = inclinação do plano da órbita em relação ao equador
- ω = argumento do perigeu
- Ω = ascenção reta do nodo ascendente
- M = anomalia média

O plano da órbita é definido em qualquer instante pelos vetores $\vec{r}$ e $\vec{v}$. O sitema de coordenadas com origem no centro da Terra, com eixo X passando pelo meridiano que contém o ponto vernal (linha dos eqüinócios), Z coincidente com o pólo norte médio (C T P = Conventional Terrestrial Pole) e Y de modo a compor um sistema dextrógiro, é conhecido como Sistema Cartesiano Celeste ou Sideral Aparente e é um sistema supostamente inercial (pseudo-inercial).

Definem-se ainda os Sistemas X'Y'Z' conhecido como Sistema Terrestre Convencional (CTS) e o Sistema xyz como o Sistema Orbital de Coordenadas, ambos já definidos em capítulos anteriores.

Já foi visto que a transformação do Sistema Orbital para o Sistema Sideral Aparente é feita por:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{S.S.A.} = R_z(-\Omega) \cdot R_x(-i) \cdot R_z(-\omega) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{ORB}$$

ou

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{S.S.A.} = \mathbb{R}(\Omega, i, \omega) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{ORB}$$

onde $$\mathbb{R}(\Omega, i, \omega) = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix},$$

sendo

$R_{11} = \cos\omega \cos\Omega - \text{sen}\,\omega \,\text{sen}\,\Omega \cos i$

$R_{12} = -\,\text{sen}\,\omega \cos\Omega - \cos\omega \,\text{sen}\,\Omega \cos i$

$R_{13} = \text{sen}\,\Omega \,\text{sen}\, i$

$R_{21} = \cos\omega \,\text{sen}\,\Omega + \text{sen}\,\omega \cos\Omega \cos i$

$R_{22} = -\,\text{sen}\,\omega \,\text{sen}\,\Omega + \cos\omega \cos\Omega \cos i$

$R_{23} = -\,\text{sen}\, i \cos\Omega$

$$R_{31} = \text{sen } \omega \text{ sen } i$$

$$R_{32} = \cos \omega \text{ sen } i$$

$$R_{33} = \cos i$$

Usando-se as equações 2.69 e 2.70, tem-se :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{SA} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\,(\cos u - e) \\ a\sqrt{1 - e^2}\ \text{sen } u \\ 0 \end{bmatrix}_{ORB} ,$$

ou, na forma

$$\begin{cases} X = A_x\,(\cos u - e) + B_x \text{ sen } u \\ Y = A_y\,(\cos u - e) + B_y \text{ sen } u \\ Z = A_z\,(\cos u - e) + B_z \text{ sen } u \end{cases} , \qquad (2.74)$$

onde

$$\begin{cases} A_x = a\,R_{11} ; & B_x = a\sqrt{1 - e^2}\ R_{12} ; \\ A_y = a\,R_{21} ; & B_y = a\sqrt{1 - e^2}\ R_{22} ; \\ A_z = a\,R_{31} ; & B_z = a\sqrt{1 - e^2}\ R_{32} . \end{cases} \qquad (2.75)$$

As componentes do vetor velocidade do satélite em relação ao Sistema Sideral Aparente (pseudo-inercial), num sistema não pertubado, serão :

$$\begin{cases} \dot{X} = \dfrac{a\,n}{r}\ (-A_x \text{ sen } u + B_x \cos u\ ) \\ \dot{Y} = \dfrac{a\,n}{r}\ (-A_y \text{ sen } u + B_y \cos u\ ) \\ \dot{Z} = \dfrac{a\,n}{r}\ (-A_z \text{ sen } u + B_z \cos u\ ) \end{cases} \qquad (2.76)$$

O fator $an/r = \dot{u}$ é obtido por derivação da Equação de Kepler

$$M = u - e \text{ sen } u = n\,(t - t_p)$$

$$\dot{M} = n = \dot{u}\,(1 - e \cos u) = \dot{u}\ \frac{r}{a}$$

$$\therefore \qquad \dot{u} = \frac{a\,n}{r} \qquad (2.77)$$

As Expressões 2.75 obedecem às seguintes relações:

$$\begin{cases} A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = a^2 \\ B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 = a^2(1 - e^2) = b^2 \\ A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0 \end{cases} \tag{2.78}$$

7.2 Resumo do processo direto de posicionamento

O processo direto consiste em transformar os elementos Keplerianos da órbita (a, e, i, ω, Ω, M ou t_p), mais a época t, em vetor de estado, posição e velocidade $(X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$ do satélite na época t.

a) Tendo o semi-eixo maior "a", pela 3ª lei de Kepler, calcula-se "n" (movimento anomalístico médio);

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

b) Calculando "n" e sendo dados "t" e "t_p", calcula-se a "M";

$$M = n\,(t - t_p)$$

c) Conhecidos "M" e "e", resolve-se a Equação transcendente de Kepler, determinando-se "u";

$$M = u - e \operatorname{sen} u$$

d) Calcula-se "r" pela expressão

$$r = a(1 - e \cos u)$$

e) Fazendo-se uso das Expressões 2.74, 2.75 e 2.76 , ou seja,

$$\begin{cases} X_i = A_i\,(\cos u - e) + B_i \operatorname{sen} u \\ \dot{X}_i = \dfrac{a\,n}{r}\left(-A_i \operatorname{sen} u + B_i \cos u\right) \end{cases},$$

calcula-se a posição $\vec{r}$ e a velocidade $\vec{v}$ do satélite no Sistema Sideral Aparente, para $i = 1,2,3$ correspondendo a X,Y,Z, e, assim

$$\begin{cases} r = (X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2} \\ v = (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2)^{1/2} \end{cases} \Rightarrow \vec{r} \text{ e } \vec{v}$$

Se se quiser calcular a posição e a velocidade no Sistema Orbital, o ítem e) ficaria:

$$\vec{r} \begin{cases} X = a(\cos u - e) \\ Y = a\sqrt{1 - e^2}\ \text{sen } u \end{cases} \quad \text{e} \quad \vec{v} \begin{cases} \dot{X} = \dfrac{a\,n}{r}\ \text{sen } u \\ \dot{Y} = \dfrac{a\,n}{r}\sqrt{1 - e^2}\ \cos u \end{cases}$$

Exercício de aplicação

Dado um sátelite artificial com:

$a = 7198,948$ km, $e = 0,085\ 763$, $t_p = 25,056\ 727$ Ago 1889 (TU)

e $t = 25,0774535$ Ago 1989 (TU),

pede-se calcular n, M, u, f, x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$.

Fazer $\mu = 398600,47\ km^3/seg^2$

Solução

$$\text{a) } n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \sqrt{\frac{398600,47}{(7198,948)^3}} \left(\frac{\frac{km^3}{seg^2}}{\frac{km^3}{1}} \right) = \frac{rad}{seg}$$

$$\therefore\ n = 1,033631 \times 10^{-3}\ \frac{rad}{seg} = \boxed{89,305\ 682\ \frac{rad}{dia}}$$

$$\text{b) } M = n\,(t - t_p) = 89,305.682\ (25,0774535 - 25,056727)\ \frac{rad}{dia} \times dia$$

$$\therefore\ \boxed{M = 1,850\ 994\ rad}$$

c) $M = u - e \operatorname{sen} u \quad \Rightarrow$ $\boxed{u = 1{,}93125 \text{ rad}}$

d) $r = a\,(1 - e \cos u) \Rightarrow$ $\boxed{r = 7416{,}704 \text{ km}}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(\cos u - e) \\ a\sqrt{1 - e^2}\ \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ 3.156{,}449 \\ 6.711{,}507 \end{bmatrix} \text{ km}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \frac{a^2 n}{r} \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} u \\ \sqrt{1 - e^2}\ \cos u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ 6{,}75846 \\ -\ 2{,}538004 \end{bmatrix} \text{ km/seg}$$

$$\therefore |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \Rightarrow \boxed{v = 7{,}219\ 297 \text{ km/seg}}$$

Observação: No cálculo da anomalia excêntrica, fazer:

1ª aproximação: $u_0 = M + e \operatorname{sen} M + \frac{1}{2} e^2 \operatorname{sen} 2M = 1{,}93146$ rad

$$M_1 = u_0 - e \operatorname{sen} u_0 = 1{,}851215$$

Aplicando Newton - Raphson $\Rightarrow$ $\boxed{u_1 = 1{,}93125 \text{ rad}}$

8. Problema inverso do posicionamento de satélites

Neste caso, são conhecidos os vetores posição ($\vec{r}$) e velocidade ($\vec{v}$) do satélite artificial e a época "t" , e deseja-se determinar seus elementos Keplerianos (a, e, i, ω, Ω, M ou t_p). a) Dados $\vec{v}$, $\vec{r}$, t, tem-se:

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \end{cases} \tag{2.79}$$

Derivando-se a primeira das equações, obtém-se:

$$r\dot{r} = X\dot{X} + Y\dot{Y} + Z\dot{Z} \tag{2.80}$$

A partir das Equações 2.79, 2.80 e mais da Equação

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

determina-se "a"

$$a = \frac{r\mu}{2\mu - v^2 r} \tag{2.81}$$

a) Obtido "a", calcula-se "n" pela 3ª lei de Kepler:

$$n^2 a^3 = \mu \Rightarrow n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \tag{2.83}$$

c) Das expressões $\begin{cases} r = a(1 - e \cos u) \\ e \cos u = 1 - \frac{r}{a} \end{cases}$,

por derivação tem-se

$$\dot{r} = ae \operatorname{sen} u \, \dot{u} \text{ , sendo } \dot{u} = \frac{a\,n}{r} \text{ ,}$$

donde se tira que $r\,\dot{r} = na^2 e \operatorname{sen} u$

$$\text{donde} \quad \begin{cases} e \cos u = 1 - \dfrac{r}{a} \\ e \operatorname{sen} u = \dfrac{r\,\dot{r}}{n\,a^2} \end{cases} , \tag{2.83}$$

sistema que permite calcular "e" e "u", sendo

$$u = tg^{-1}\left(\frac{r\,\dot{r}}{na(a - r)}\right)$$

podendo a excentricidade ser também calculada por

$$e = \sqrt{1 - \frac{G^2}{\mu a}} \text{ , onde } G = |\vec{r} \wedge \vec{v}| \text{ .}$$

Tendo-se "u" e "e", calcula-se M por aplicação direta da Equação de Kepler

$$M = u - e \operatorname{sen} u,$$

o que permite calcular "t_p"

$$M = n\,(t - t_p) \Rightarrow t_p = \frac{nt - M}{n} \tag{2.84}$$

e) O cálculo dos últimos elementos Keplerianos, "Ω" e "i" é feito da seguinte forma:

$$\Omega = tg^{-1}\left[\frac{-G_x}{G_y}\right] \tag{2.85}$$

$$i = tg^{-1}\left[\frac{\left(G_x^{\,2} + G_y^{\,2}\right)^{1/2}}{G_z}\right], \tag{2.86}$$

onde $\quad \operatorname{sen} i = \dfrac{\left(G_x^{\,2} + G_y^{\,2}\right)^{1/2}}{G} \quad ; \quad \cos i = \dfrac{G_z}{G} \; ;$

$$\operatorname{sen}\Omega = \frac{G_x}{\left(G_x^{\,2} + G_y^{\,2}\right)^{1/2}} \quad ; \quad \cos\Omega = \frac{-G_z}{\left(G_x^{\,2} + G_y^{\,2}\right)^{1/2}} \; ;$$

e sendo G_x, G_y, G_z as componentes do vetor momento angular específico G, que é o momento angular por unidade de massa..

Assim:

$$\vec{G} = \vec{r} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ X & Y & Z \\ \dot{X} & \dot{Y} & \dot{Z} \end{vmatrix}, \tag{2.87}$$

que, efetuando, resulta

$$\vec{G} = (Y\dot{Z} - \dot{Y}Z)\,\hat{i} + (Z\dot{X} - \dot{Z}X)\hat{j} + (X\dot{Y} - \dot{X}Y)\hat{k}, \tag{2.88}$$

donde tiram-se as componentes

$$G_x = Y\dot{Z} - \dot{Y}Z \quad , \quad G_y = Z\dot{X} - \dot{Z}X \quad \text{e} \quad G_z = X\dot{Y} - \dot{X}Y$$

O momento angular é perpendicular ao plano da órbita, conforme mostra a Figura 2.14. Girando-se $\vec{G}$ em torno da linha dos nodos, sua projeção estará a 90° da mesma e, portanto,

$$\begin{cases} G_x = G \text{ sen } i \text{ sen } \Omega \\ G_y = -G \text{ sen } i \cos \Omega \\ G_z = G \cos i \end{cases} \qquad (2.89)$$

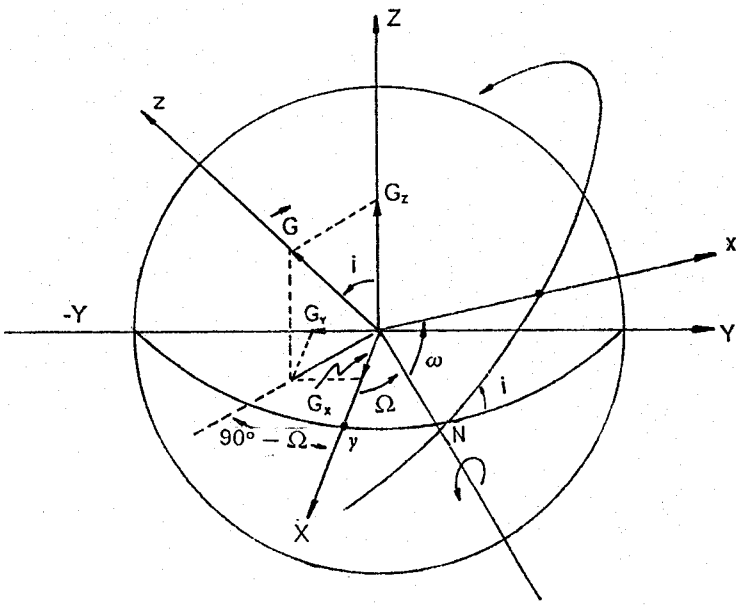


Fig 2.14 - Representação do momento angular para satélites

Para que a órbita fique determinada, resta agora calcular "ω" (argumento do perigeu).

A determinação de "ω" se faz através de duas rotações de eixos, que são as constantes da Figura 2.15:

a) Uma rotação $R_z(\Omega)$, que leva X para X'

$$X' = R_z(\Omega);$$

b) Uma rotação $R_{x'}(i)$, que leva Y' do plano do equador para o plano da órbita

$$X'' = R_{x'}(i)\ X';$$

o que resulta na Equação total das rotações

$$X'' = R_{x'}(i) \cdot R_z(\Omega)\, X. \tag{2.90}$$

Porém, em virtude da Figura 2.15, tem-se que

$$X'' = \begin{bmatrix} r\cos\nu \\ r\,\mathrm{sen}\,\nu \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ onde } \nu = \omega + f, \tag{2.91}$$

logo ,

$$\nu = \omega + f = tg^{-1}\left(\frac{Y''}{X''}\right), \tag{2.92}$$

e, como "f" pode ser calculado por

$$tg\left(\frac{f}{2}\right) = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2} tg\left(\frac{u}{2}\right),$$

"ω" fica determinado, e o problema inverso fica resolvido.

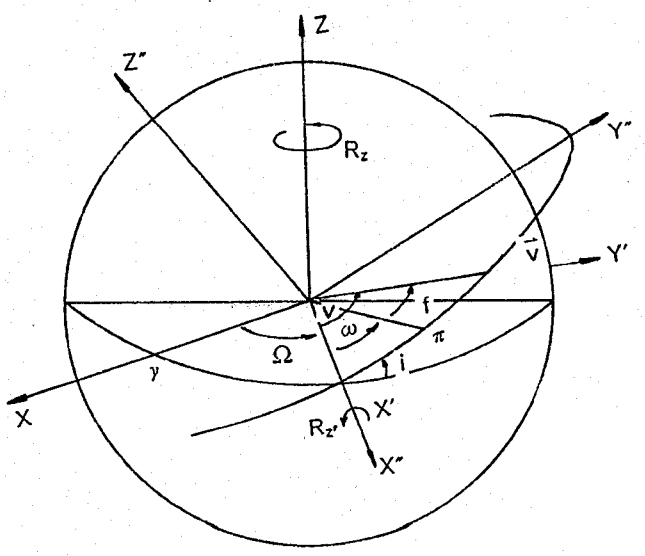


Fig 2.15 - Argumento do perigeu ω

8.1 Resumo do processo inverso

Dados $\vec{r}$ e $\vec{v}$, além do instante "t", calcula-se:

a) $r = \left(X^2 + Y^2 + Z^2\right)^{1/2}$

$v^2 = \left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2\right)$

$r\dot{r} = X\dot{X} + Y\dot{Y} + Z\dot{Z}$

b) $\left.\begin{aligned} G_x &= Y\dot{Z} - \dot{Y}Z \\ G_y &= Z\dot{X} - \dot{Z}X \\ G_z &= X\dot{Y} - \dot{X}Y \end{aligned}\right\} \quad G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2}$

$$\Omega = tg^{-1}\left[-\frac{G_x}{G_j}\right] \Rightarrow "\Omega"$$

e $$i = tg^{-1}\left[\frac{\sqrt{G_x^2 + G_y^2}}{G_z}\right] \Rightarrow "i"$$

c) $$a = \frac{r\mu}{2\mu - v^2 r} \Rightarrow "a"$$

d) $$e = \left(1 - \frac{G^2}{\mu a}\right)^{1/2} \Rightarrow "e"$$

e) $$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \Rightarrow "n"$$

f) $$u = tg^{-1}\left(\frac{r\,\dot{r}}{na(a - r)}\right) \Rightarrow "u"$$

g) $M = u - e \operatorname{sen} u$ (Equação de Kepler) $\Rightarrow$ " M "

h) $$tg\left(\frac{f}{2}\right) = \left(\frac{1 + e}{1 - e}\right)^{1/2} \cdot tg\left(\frac{u}{2}\right) \Rightarrow " f "$$

i) $\nu = tg^{-1}\left(\frac{-X \text{ sen } i \text{ sen } \Omega - Y \text{ sen } i \cos \Omega + Z \cos i}{X \cos \Omega + Y \text{ sen } \Omega}\right) \Rightarrow$ " ν "

$$\omega = \nu - f \Rightarrow \text{ " } \omega \text{ "}$$

8.2 Sistemas Normalizados

Se considerar-se $\mu^* = 1$, para a Terra, onde o raio equatorial vale $a_e = 6378,165$ km, e o parâmetro gravitacional é $\mu = 398603$ km^3/seg^2, tem-se:

$$\mu^* = 398603 \frac{(km/a_e^3}{(seg/T)^2} = 1 ,$$

ou

$$\mu^* = 398603 \left(\frac{km^3}{seg^2} \frac{T^2}{a_e^3}\right) \Rightarrow \mu^* = \mu \frac{T^2}{a_e^3} = 1$$

donde se tira que $T = \sqrt{\frac{a_e^3}{\mu}} = 806,813848$ seg, como padrão para o tempo.

Num sistema normalizado, os padrões terrestres serão:

$$\mu^* = 1$$

$$a_e = 6378,165 \text{ km}$$

$$T = 806,81 \text{ seg}$$

Exercício de aplicação

Dadas a posição e a velocidade normalizadas de um satélite artificial num instante "t", pede-se determinar os elementos orbitais Keplerianos (a, e, i, ω, Ω, M).

$$\begin{cases} \vec{r} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} \\ \vec{v} = -0,4\hat{i} + 0,2\hat{j} + 0,4\hat{k} \end{cases}$$

Solução:

a) $r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = 12 \Rightarrow r = 3,464101615\ a_e$

$v^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2 = 0,36 \Rightarrow v = 0,6\ a_e/T$

$r\dot{r} = X\dot{X} + Y\dot{Y} + Z\dot{Z} = 0,4$

$$\left.\begin{array}{l} G_x = Y\dot{Z} - \dot{Y}Z \\ G_j = Z\dot{X} - \dot{Z}X \\ G_z = X\dot{Y} - \dot{X}Y \end{array}\right\} \quad G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2} = 2,039608$$

$$\Rightarrow G^2 = 4,6 \quad e \quad A \triangleq \sqrt{G_x^2 + G_y^2} = 1,649242250$$

$$\begin{cases} \text{sen } i = A/G = 0,808\ 607\ 540 \\ \cos i = G/G = 0,588\ 348\ 406 \end{cases} \Rightarrow \boxed{i = 53,96^\circ}$$

$$\begin{cases} \text{sen } \Omega = G_x/A = 0,242\ 535\ 625 \\ \cos \Omega = -G_y/A = 0,970\ 142\ 500 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Omega = 14,03^\circ}$$

b) $v^2 \Rightarrow a = \dfrac{r}{2 - v^2 r} \Rightarrow \boxed{a = 4,600\ 868\ 463\ a_e}$

c) $e = \left(1 - \dfrac{G^2}{a}\right)^{1/2} \Rightarrow \boxed{e = 0,309\ 552\ 708}$

d) $n = \sqrt{\dfrac{\mu}{a^3}} = \sqrt{\dfrac{1}{a^3}} \Rightarrow n = 0,101\ 330\ 521\ \text{rad/T}$

e) $u = \text{tg}^{-1}\left(\dfrac{r\dot{r}}{na(a - r)}\right) \Rightarrow u = 37,04^\circ$

$M = u - e \text{ sen } u \Rightarrow \boxed{M = 26,36^\circ}$

f) $\text{tg}\left(\dfrac{f}{2}\right) = \left(\dfrac{1 + e}{1 - e}\right)^{1/2} \text{tg}\left(\dfrac{u}{2}\right) \Rightarrow f = 49,53^\circ$

$$\nu = \text{tg}^{-1}\left(\frac{-X \text{ sen } i\ \Omega - Y \text{ sen } i \cos \Omega + Z \cos i}{X \cos \Omega + Y \text{ sen } \Omega}\right) =$$

$$= \frac{-2 \cos 53^\circ,96 \text{ sen } 14,03^\circ + 2 \cos 53,96^\circ \cos 14,03^\circ + 2 \text{ sen } 53,96^\circ}{2 \cos 14,03^\circ + 2 \text{ sen } 14,03^\circ} =$$

$$= \frac{2,473543}{2,425198} = 1,019\ 935 \Rightarrow \nu = 45,565\ 433^\circ$$

$$\omega = \nu - f = 45,56433^\circ - 49\ ,53^\circ$$

$$\therefore \boxed{\omega = 356,035\ 433^\circ}$$

9. Movimento perturbado de um satélite artificial

9.1 Introdução

O movimento de um satélite artificial no vácuo, sujeito exclusivamente à atração imposta por uma Terra esférica e homogênea seria Kepleriano, percorrendo uma elípse perfeita e não perturbada.

Estudando o movimento da Terra ao redor do Sol, pode-se considerá-la "esférica e homogênea" e, assim, reduzida a uma massa puntiforme. Tal não ocorre, porém, ao se estudar o movimento de um satélite artificial,porque, nesse caso, as componentes não esféricas do campo gravitacional assumem grande importância, impondo variações de monta na órbita não perturbada. Há fatores que introduzem perturbações periódicas (de curto e longo período) e seculares. Tais fatores são:

a) Fatores gravitacionais

- achatamento terrestre
- distribuição não homogênea das massas
- elipticidade equatorial

} perturbações terrestres

- atração luni-solar
- marés terrestres
- efeitos relativistas

b) Fatores não gravitacionais

atrito com a atmosfera ("arrasto")

pressão de radiação solar

efeitos eletromagnéticos

9.2 Perturbações terrestres

Forças perturbadoras são todas as forças que agem sobre o satélite, além daquela responsável pelo movimento orbital. Podem ser expressas matematicamente por meio de uma função perturbadora R_T, a qual é nula no caso do problema de dois corpos.

Define-se a função perturbadora terrestre relacionando-a com o potencial perturbador T da Geodésia Física, lembrando que

$$W = U + T, \tag{2.93}$$

sendo (W) o potencial da gravidade, (U) o esferopotencial de atração e (T) o potencial perturbador, tendo-se para o valor de (U) a expressão

$$U = \frac{GM}{r}\left[1 - J_2\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_{2,0} - J_4\left(\frac{a}{r}\right)^4 P_{4,0} - \ldots\ \ldots\ \ldots\right]. \tag{2.94}$$

Restringindo o desenvolvimento em série do esferopontencial ao 4º grau, tem-se, para a função perturbadora

$$R_T = \frac{-GM}{r}\left[J_2\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_{2,0} + J_4\left(\frac{a}{r}\right)^4 P_{4,0} + \frac{a}{4\pi}\iint S(r,\psi)d\sigma, \right. \tag{2.95}$$

onde o último termo corresponde ao potencial perturbador T em função das anomalias da gravidade, $S(r.\psi)$ é a função de Stokes generalizada e os $P_{i,0}$ são coeficientes do polinômio de Legendre.

O J_2, que exprime o achatamento terrestre, é o termo que mais perturba o satélite, e pode ser considerado como uma grandeza de

1ª ordem (aproximadamente 10^{-3}).

9.3 O arrasto

A segunda maior perturbação para satélites até 1.000 km de altura é causada pelo arrasto ("drag"). A força perturbadora produzida por este atrito tem uma componente tangencial negativa, a qual, no caso da resistência constante, tem a mesma intensidade em pontos simétricos ao semi-eixo maior.

O efeito do arrasto é a diminuição do semi-eixo maior e da excentricidade da elípse orbital, acarretando uma diminuição do período. Se a órbita for acentuadamete elíptica, a maior parte do arrasto ocorrerá nas vizinhanças do perigeu. O satélite sofre, então, um pequeno retardamento quando passa pelo perigeu, e isto, então, causa uma perda de altura do satélite no apogeu, na passagem seguinte, mas quase sem alteração da sua altura no perigeu. Isso faz com que a órbita fique cada vez mais circular. Assim, o semi-eixo maior, a excentricidade e o período tendem a diminuir. Se a órbita for uma elípse quase circular, a tendência é converter o círculo numa espiral, reduzindo o semi-diâmetro. O arrasto é uma perturbação secular, e seu efeito pode ser apreciado na Figura 2.16. Além, disso, existe uma variação de curto período na linha dos ápices, conforme foi visto na Seção 5.1, Figura 2.7.

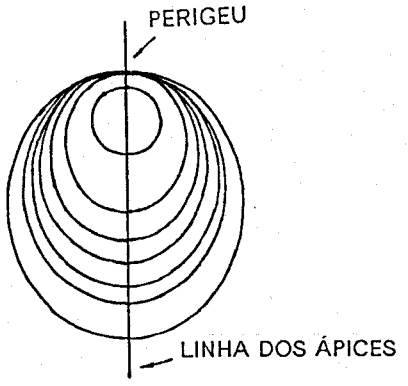


Fig. 2.16 - Efeito do arrasto

9.4 Atração luni-solar.

É um efeito pequeno e periódico, aplicável a satélites de órbita alta, como por exemplo o NAVSTAR (20.200 km). Todos os parâmetros orbitais são afetados, exceto o semi-eixo maior, que permanece fixo.

9.5 Pressão de radiação solar.

Interessa apenas a satélites de grande altura. Pode ser:

. direta - vinda diretamente do Sol;

. indireta - através do "albedo", que é a pressão de radiação do Sol refletida e irradiada pela Terra.

A distância do Sol é considerada constante. A direção de perturbação depende das posições relativas do satélite e do Sol, e a intensidade depende da posição do satélite em relação à sombra da Terra.

A Tabela 2.2 apresenta a ordem de grandeza das forças perturbadoras em um sistema normalizado.

TABELA 2.2

ORDEM DE GRANDEZA DAS FORÇAS PERTURBADORAS

TIPO DE PERTURBAÇÃO	Sat. próximo (h = 1.000 km)	Geoestac. (h = 36.0000 km)
Leis de Kepler	1	1
Fator de achatamento terrestre	10^{-3}	10^{-5}
Geopotencial	10^{-6}	10^{-8}
Atração luni-solar	10^{-7}	10^{-5}
Arrasto	10^{-7}	0
Pressão de radiação solar	10^{-8}	10^{-6}
Marés terrestres	10^{-10}	10^{-13}

CAPÍTULO 3

MEDIÇÃO DOPPLER

1. O efeito Doppler - Fizeau

A Astronomia na determinação da velocidade radial das galáxias, os controladores de tráfego na medida da velocidade de aproximação de um veículo, a Artilharia antiaérea no acompanhamento de aeronaves e a Geodésia Espacial no posicionamento de estações terrestres, valem-se de um mesmo fenômeno: o chamado Efeito Doppler, descoberto pelo físico austríaco Christian Doppler, em 1842 e, segundo o qual, a frequência de um sinal recebido por um observador depende da velocidade desse observador e/ou da velocidade da fonte produtora do sinal. Inicialmente o efeito foi comprovado para o caso de ondas sonoras e posteriormente aplicado em Ótica, transformando-se em notável ferramenta da Astronomia. É também conhecido sob a denominação de efeito Doppler-Fizeau.

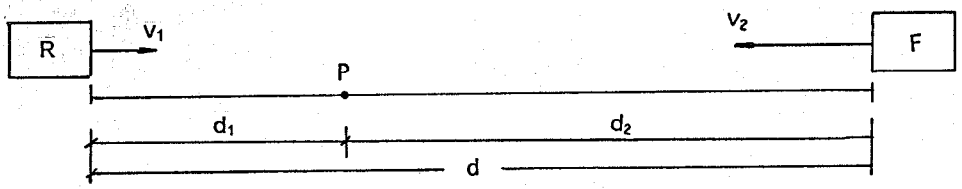


Fig. 3.1 - Princípio do Efeito Doppler.

Seja o caso em que um receptor e uma fonte deslocam-se na mesma direção, porém em sentidos opostos, aproximando-se um do outro com velocidades v_1 e v_2. Sejam ainda "c" a velocidade do sinal (ondas eletromagnéticas no vácuo, por exemplo) e P a posição onde os dois móveis se cruzam. Nos intervalos d_1 e d_2, tem-se:

$$t_1 = \frac{d_1}{v_1} \qquad \text{e} \qquad t_2 = \frac{d_2}{v_2} \ .$$

O receptor recebe um certo número de ciclos dado por

$$N = t_1 \ . \ f_R \tag{3.1}$$

onde f_R é a frequência do sinal recebido pelo receptor, modificada pelo efeito Doppler.

N representa também o número de ciclos transmitidos pela fonte, ou seja, aqueles já existentes entre a fonte e o receptor no início do movimento (produzidos no intervalo t = d/c) e os produzidos no intervalo $t_2 = d_2 / v_2$. No ponto de cruzamento, o número de ondas captadas pelo receptor deve igualar o número de ondas produzidas pela fonte.

Assim

$$N = (t + t_2) \ f_T \ , \tag{3.2}$$

sendo f_T a frequência do sinal transmitido.

Igualando-se as Equações 3.1 e 3.2, e sabendo-se que $t_1 = t_2$, porque os tempos para que receptor e fonte cheguem ao ponto P são iguais, tem-se:

$$f_R \ t_1 = (t + t_2) \ f_T \ ,$$

ou

$$f_R = f_T \left(1 + \frac{1}{t_1} \right) \ , \tag{3.3}$$

mas

$$\frac{t}{t_1} = \frac{dv_1}{d_1 c}, \tag{3.4}$$

ou

$$\frac{dv_1}{d_1} = \frac{(d_2 + d_1) \ v_1}{d_1} = \frac{(t_2 v_2 + t_1 v_1)}{t_1 v_1} = \frac{t_1 v_2 \ (t_1 + v_1) \ v_1}{t_1 v_1} =$$

$$= \frac{t_1 v_1 \ (v_1 + v_2)}{t_1 v_1} = v_1 + v_2 \tag{3.5}$$

Considerando-se as Equações 3.3, 3.4 e 3.5, tem-se

$$f_R = f_T \left(\frac{v_1 + v_2}{c} + 1 \right) = f_T \left(\frac{v}{c} + 1 \right), \qquad (3.6)$$

onde $v = v_1 + v_2$ representa a velocidade de aproximação.

Finalmente

$$f_R - f_T = \Delta f = f_T \frac{v}{c} \quad , \qquad (3.7)$$

onde Δf é a diferença entre a frequência recebida e a transmitida, designada simplesmente por frequência Doppler.

A Expressão 3.7 também vale para o caso de afastamento de R, de F, ou se ambos, bastando em $v = v_1 + v_2$, utilizar convenientemente o sinal negativo.

$v > 0 \longrightarrow \Delta f > 0 \longrightarrow f_R > f_T \longrightarrow$ a frequência recebida é maior que a transmitida, R e F estão se aproximando;

$v < 0 \longrightarrow \Delta f < 0 \longrightarrow f_R < f_T \longrightarrow$ frequência recebida é menor que a transmitida, R e F estão se afastando;

$v = 0 \longrightarrow \Delta f = 0 \longrightarrow f_R = f_T \longrightarrow$ Não há efeito Doppler.

2. Geometria do efeito Doppler.

No caso de um satélite artificial portador de um transmissor que emite continuamente ondas eletromagnéticas em uma frequência constante, "c" passa a ser a velocidade eletromagnética e "v" a velocidade radial do satélite, conforme é mostrado na Figura 3.2:

$$\Delta_f = f_T \frac{v}{c}$$

$$\therefore \qquad \Delta_f = f_T \frac{\dot{r}}{c} \qquad (3.8)$$

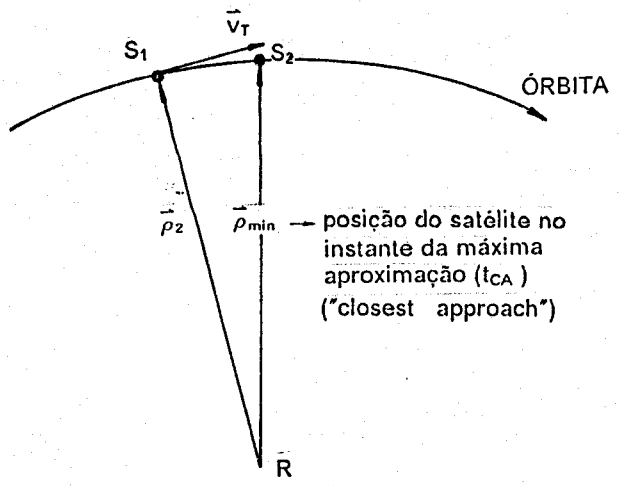


Fig. 3.2 - Geometria do efeito Doppler

No momento da máxima aproximação do satélite (distância mínima), a derivada (velocidade radial) se anula; precisamente nesse instante as freqüências transmitida e recebida são iguais, ou seja, $\Delta f = 0$.

A Expressão 3.8 mostra que a freqüência Doppler é proporcional à velocidade radial. Representando num gráfico a variação da freqüência recebida em função do tempo, obtém-se uma curva como se vê na Figura 3.3. O ponto de inflexão corresponde precisamente ao instante crítico t_{CA} da máxima aproximação.

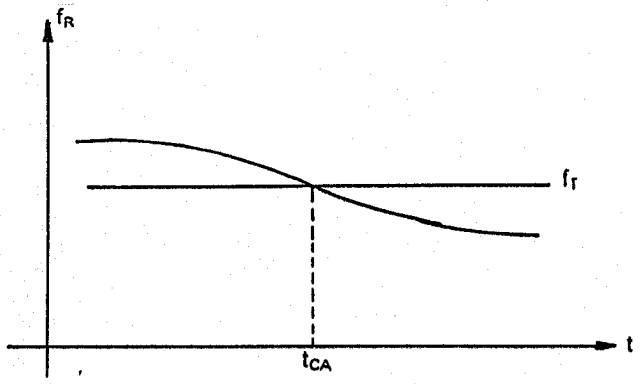


Fig. 3.3 - Instante da máxima aproximação.

Foi visto anteriormente que o rastreamento Doppler, sob o ponto de vista geométrico, proporciona a diferença de distâncias do observador a duas posições conhecidas do satélite. Isto significa que o observador se encontra sobre a superfície de um hiperbolóide de revolução, com focos nas posições conhecidas do satélite. Através de diversas observações, obtém-se diversos hiperbolóides que, salvo erros de observação e de cálculos, se interceptam na estação rastreadora, obtendo-se, assim, suas coordenadas por interseções múltiplas.

3. Medição Doppler

Na determinação de uma posição a partir do rastreamento Doppler de satélites, leva-se em consideração 3 (três) tipos de freqüência:

- f_S - freqüência constante transmitida pelo satélite;
- f_R - freqüência recebida pelo receptor

$$f_R = f_S \left(1 + \frac{\dot{r}}{c}\right);$$

- f_0 - freqüência básica do receptor ou freqüência de comparação.

Na prática, a freqüência Doppler é obtida substituindo-se f_S por f_0, que é a freqüência do oscilador local do próprio receptor.

As medidas Doppler consistem em integrar a diferença de freqüências $(f_0 - f_R)$ sobre um intervalo de tempo qualquer, obtendo-se a Contagem Doppler "ΔN".

$$\Delta N = \int_{t_j}^{t_k} (f_0 - f_R)\, dt \qquad (3.9)$$

Na contagem do número de ciclos pelo oscilador do receptor ocorre um problema: os sinais de tempo que determinam os instantes inicial e final da

contagem, dificilmente coincidem com posições de número inteiro de ciclos. O oscilador, por sua vez, inicia a contagem a partir do instante em que estes passam, pela primeira vez, de negativo para positivo, ou seja, na primeira passagem crescente por zero.

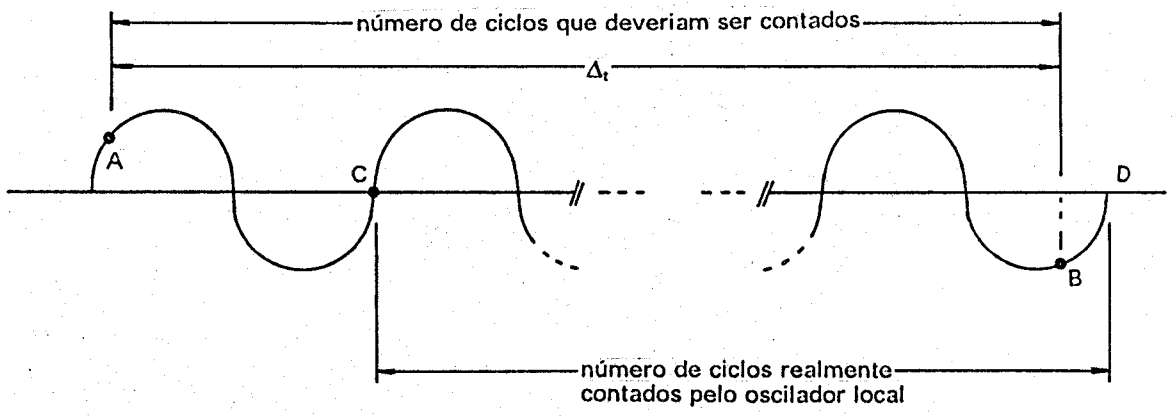


Fig. 3.4 - Contagem do número de ciclos.

A pior situação ocorrerá no caso mostrado na Figura 3.4, quando tem-se um erro máximo de 1 ciclo. Esse erro representa cerca de 40 μseg no tempo e cerca de 30 cm na posição do satélite em sua órbita.

Cada fabricante de receptor utiliza uma forma diferente para contornar o problema da contagem dos ciclos.

Conhece-se 3 (três) tipos de contagem Doppler:

- contagem Doppler integrada
- contagem Doppler instantânea
- contagem Doppler continuamente integrada

3.1- Contagem Doppler integrada

É a mais utilizada. Nela, o intervalo de integração pode ser

fornecido pelo

- Sistema de tempo do satélite (satellite time frame)
- Sistema de tempo do receptor (fixed time frame)

a) Sistema de tempo do satélite

O satélite emite os sinais no instante t_1 e o receptor só começa a recebê-los no instante $t_1 + \Delta t_1$, ocorrendo o mesmo para o instante t_2, e assim por diante.

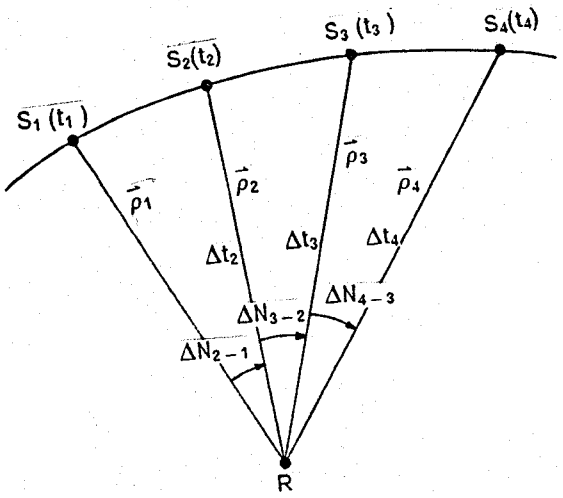


Fig. 3.5 - Contagem Doppler integrada

Tem-se que

$$\Delta N = \int_{t_1}^{t_2} (f_0 - f_R)\, dt,$$

logo, no caso

$$\Delta N = \int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_2 + \Delta t_2} (f_0 - f_R)\, dt,$$

portanto

$$\Delta N = \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} (f_0 - f_R)dt = f_0\left[(t_2 - t_1)+(\Delta t_2 - \Delta t_1)\right] - \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} f_R . dt \qquad (3.10)$$

Como se sabe, o número de ciclos transmitidos é igual ao número de ciclos recebidos, logo:

$$\int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} f_R \, dt = \int_{t_1}^{t_2} f_S \, dt = f_S(t_2 - t_1) \qquad (3.11)$$

Assim

$$\Delta N = f_0 \left[(t_2 - t_1) + (\Delta t_2 - \Delta t_1)\right] - f_S (t_2 - t_1) = (f_0 - f_S)(t_2 - t_1) + f_0 (\Delta t_2 - \Delta t_1) ,$$

mas,

$$\Delta t_2 = \frac{\rho_2}{c} \quad \text{e} \quad \Delta t_1 = \frac{\rho_1}{c}, \qquad (3.12)$$

logo

$$\Delta N = (f_0 - f_S)(t_2 - t_1) + \frac{f_0}{c}(\rho_2 - \rho_1) \qquad (3.13)$$

b) Sistema de tempo do receptor

$$\Delta N = \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} (f_0 - f_R) \, dt, \text{ onde } \begin{cases} t_1 + \Delta t_1 = \tau_1 \longrightarrow \text{hora do relógio do receptor no início do intervalo;} \\ t_2 + \Delta t_2 = \tau_2 \longrightarrow \text{idem ao final do intervalo} \end{cases}$$

$$\Delta N = \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} \left[\left(f_0 - f_S\right) - \left(f_R - f_S\right)\right] dt = \left(f_0 - f_S\right)\left(\tau_2 - \tau_1\right) - \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} (f_R - f_S)\, dt, \qquad (3.14)$$

mas

$$\int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} f_R dt = \int_{t_1}^{t_2} f_S \, dt = f_S\left(t_2 - t_1\right) \qquad (3.15)$$

e

$$\int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} f_R dt = f_S\left(t_2 - t_1\right) + f_S\left(\Delta t_2 - \Delta t_1\right) \qquad (3.16)$$

Levando os valores das Equações 3.15 e 3.16 na Equação 3.14, tem-se

$$\Delta N = (f_o - f_s)\ (\tau_2 - \tau_1) + f_s\ (\Delta t_2 - \Delta t_1),$$

ou

$$\Delta N = (f_o - f_s)\ (\tau_2 - \tau_1) + \frac{f_s}{c}\ (\rho_2 - \rho_1), \qquad (3.17)$$

3.2 - Contagem Doppler instantânea.

É muito usada em receptores militares. Na contagem Doppler instantânea, o intervalo de tempo é considerado tão pequeno que, se for tomado

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = f(t)$$

obtém-se a frequência no meio do intervalo. Para outros tipos de contagem isso não é possível em virtude da variação da frequência. O sistema de tempo utilizado é o do receptor.

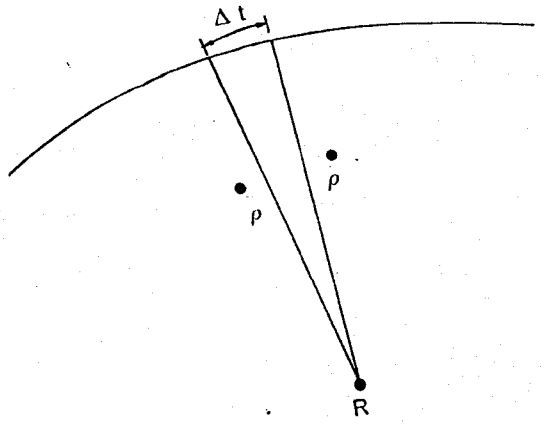


Fig. 3.6 - Contagem Doppler instantânea

A velocidade radial, embora sendo variável, é considerada constante, em virtude do intervalo considerado ser muito pequeno.

3.3 - Contagem Doppler continuamente integrada.

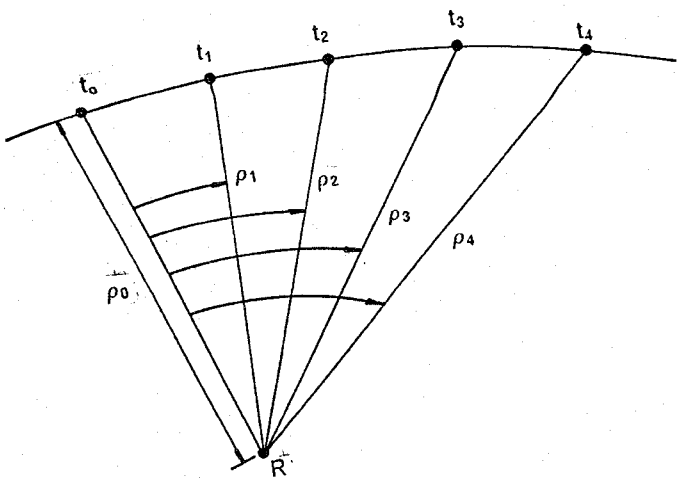


Fig. 3.7 - Contagem Doppler continuamente integrada.

A contagem Doppler continuamente integrada ainda encontra-se em fase de desenvolvimento.

O que a difere da contagem Doppler integrada é que, enquanto esta obtém diferenças de distancias entre duas posições sucessivas do satélite ao receptor, ela obtém as distâncias estação-satélite a partir de um valor ρ_0 obtido aproximadamente a priori, conforme a Figura 3.7.

$$\Delta N = (f_0 - f_s)\ (t_2 - t_1) + \frac{f_0}{c}\ (\rho_2 - \rho_1)$$

ou

$$\rho_2 - \rho_1 = c \cdot \frac{\Delta N - (f_0 - f_s)\ (t_2 - t_1)}{f_0} \quad .$$

De forma genérica, o modelo matemático será :

$$\rho_i = \rho_0 + c \cdot \frac{\Delta N - (f_0 - f_s)\ (t_i - t_0)}{f_0} \quad . \qquad (3.18)$$

CAPÍTULO 4

REFRAÇÃO IONOSFÉRICA E TROPOSFÉRICA

1. Considerações Gerais

A fim de propiciar a medição Doppler, bastaria a comparação de uma única frequência do oscilador local do receptor. A transmissão de uma segunda frequência visa proporcionar um artifício para a correção da refração atmosférica.

Com o propósito de calcular os atrasos na propagação dos sinais emitidos pelo satélite, a atmosfera terrestre pode ser considerada como composta de duas partes: a ionosfera e a troposfera, cuja ordem de grandeza pode ser apreciada na configuração em escala apresentada na Figura 4.1.

A troposfera extende-se desde a superfície da Terra até aproximadamente 40 km, e é considerada como uma "concha" esférica de gases.

A ionosfera extende-se desde 40 km até 400 km de altitude, e é composta de íons positivos e elétrons ionizados pelas radiações ultra-violeta do Sol.

O índice de refração de um meio de propagação que não seja o vácuo é dado por

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_{vácuo}}{\lambda_{meio}} \quad , \tag{4.1}$$

onde "c" é a velocidade de propagação da luz no vácuo e "v" é a velocidade de propagação da luz no meio considerado, e a refratividade é dada por

$$Re = (n - 1)\ 10^6 \tag{4.2}$$

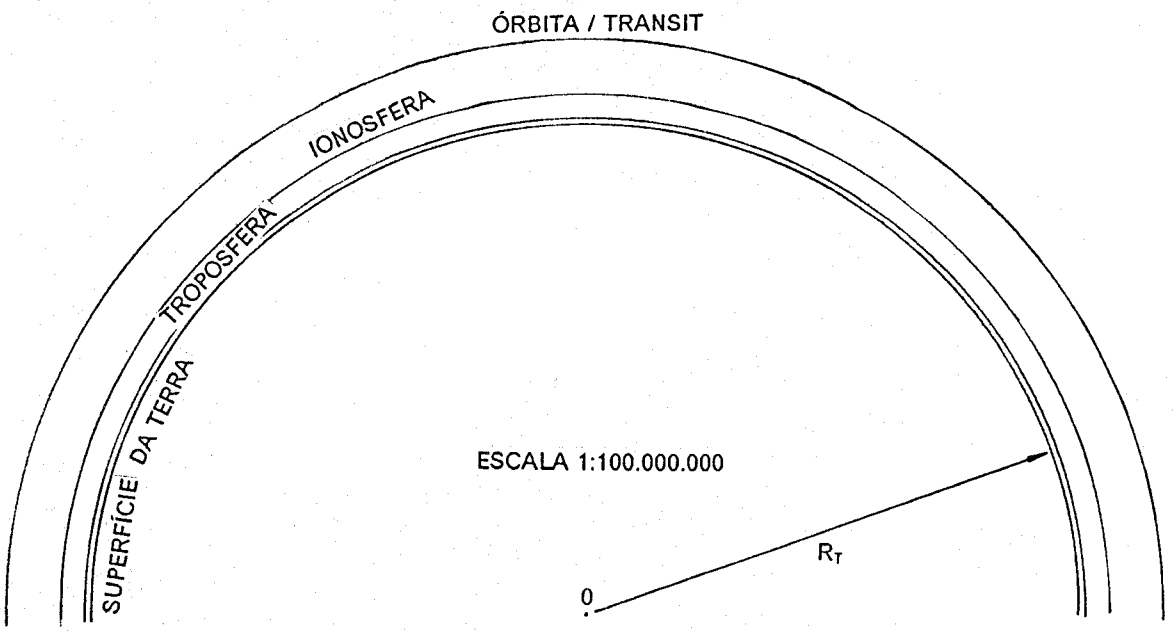


Fig. 4.1 - Configuração da atmosfera terrestre

Deve-se considerar também duas características importantes que podem possuir determinados meios:

◦ Dispersão - característica que se diz ter um meio, no qual os comprimentos de onda são função da frequência

$$\lambda = f\ (f);$$

◦ Não-homogeneidade - quando os comprimentos de onda variam em função da posição e do tempo

$$\lambda = f\ (r,t);$$

1.1- Distâncias geométrica e aparente

O caminho percorrido por uma onda eletromagnética entre dois pontos A

e B, no vácuo, é denominado distância geométrica. Quando o caminho é medido em outro meio qualquer, porém considerando a velocidade de propagação daquele meio igual a "c", a distância é dita aparente.

A velocidade de uma onda na ionosfera faz com que a distância medida seja aparente, já que a velocidade de propagação naquele meio é considerada como sendo a da luz. Esta distância aparente é menor que a distância geométrica, uma vez que a velocidade real de propagação é maior que "c".

Além disso, considerando-se que os índices de refração da ionosfera e da troposfera são ligeiramente maiores que a unidade ($n \cong 1{,}003$), as distâncias receptor-satélite, propiciadas pelas contagens Doppler, são aparentemente maiores que as distâncias geométricas, razão pela qual deve-se obter modelos matemáticos que permitam uma redução nos valores das contagens Doppler.

O meio de propagação das micro-ondas através da ionosfera é dispersivo.

2. Redução devida à refração ionosférica.

A equação básica

$$\Delta f = f_T \frac{r}{c} \tag{4.3}$$

é válida para o vácuo, onde as distâncias r seriam retilíneas. É possível reescrevê-la na forma

$$\Delta f = f_T \frac{\rho}{c} , \tag{4.4}$$

onde ρ é a derivada da efetiva trajetória das ondas eletromagnéticas na atmosfera. Esta trajetória dependerá, logicamente, do índice de refração,

podendo ser expressa pela equação

$$\rho = \int (r,f,t)dr. \qquad (4.5)$$

Na região da micro-onda, a propagação através da ionosfera é dispersiva, sendo seu índice de refração dado pela equação de Appleton-Hartree:

$$n(r,f,t) = \left[1 - \frac{f_{Re}^2\ (r,t)}{\alpha\ f^2}\right]^{1/2} = \left[1 - \frac{81\ Re(r,t)}{f^2}\right]^{1/2}, \qquad (4.6)$$

onde $f_{Re}\ (r,t)$ é a freqüência de ressonância do elétron do plasma para a posição "r" e o tempo "t", a qual depende da densidade de elétrons, ou seja, da quantidade de elétrons por unidade de volume e "α" é uma função do valor do campo magnético terrestre para a posição "r" da orientação do campo magnético para a direção de propagação e da freqüêcia de propagação f.

O índice de refração na ionosfera pode ser expandido segundo potências inversas da freqüência da micro-onda

$$n = 1 + \frac{c_1}{f^2} + \frac{c_2}{f^3} + \ldots, \qquad (4.7)$$

onde os c_i são funções da posição e do tempo, mas não da freqüência.

A contribuição da ionosfera ao longo do percurso percorrido pelo sinal será

$$\Delta s = \int (n - 1)\ ds = \frac{b_1}{f} + \frac{b_2}{f^2} + \ldots \qquad (4.8)$$

onde os b_i não são função da freqüência.

A Equação 4.8 pode ser demonstrada a partir de

$s = v\ .\ t$, mas, como $v = \lambda f$, então

$$s = \lambda f t. \qquad (4.9)$$

Levando a Equação 4.7 na 4.8, tem-se:

$$\Delta s = (n - 1) \int ds = \left(1 + \frac{c_1}{f^2} + \frac{c_2}{f^3} + \ldots - 1\right) \left[s \right]_1^1 = \left(\frac{c_1}{f^2} + \frac{c_2}{f^3} + \ldots\right)$$

$$\left(\lambda f t \right) + \ldots = \frac{c_1 \lambda t}{f} + \frac{c_2 \lambda t}{f^2} + \ldots$$

Fazendo $c_i \lambda t = b_i$, tem-se

$$\Delta s = \frac{b_1}{f} + \frac{b_2}{f^2} + \ldots,$$

e a Equação 4.8 está demonstrada.

Reportando-se à fórmula básica da contagem Doppler, observa-se a diferença entre as contagens observada e no vácuo:

$$\Delta N_{OBS} = (f_0 - f_s)\, \Delta t + \frac{f_0}{c} \left[\rho_2 - \rho_1 + \Delta\rho_2 - \Delta\rho_1 \right] \qquad (4.10)$$

$$\Delta N_{VÁCUO} = (f_0 - f_s)\, \Delta t + \frac{f_0}{c} \left[\rho_2 - \rho_1 \right] \qquad (4.11)$$

$$\Delta N_{OBS} - \Delta N_{VÁCUO} = \frac{f_0}{c} \rho_2 - \frac{f_0}{c} \rho_1 + \frac{f_0}{c} \Delta\rho_2 - \frac{f_0}{c} \Delta\rho_1 - \frac{f_0}{c} \Delta\rho_2 +$$

$$\frac{f_0}{c} \rho_1 = \frac{f_0}{c} \left[\Delta\rho_2 - \Delta\rho_1 \right] = \frac{f_0}{c} \left[\frac{b_{12}}{f_0^2} + \frac{b_{22}}{f_0^3} + \ldots - \left(\frac{b_{11}}{f_0^2} + \frac{b_{21}}{f_0^3} \right) \right] =$$

$$= \frac{f_0}{c} \left[\frac{b_{12} - b_{11}}{f_0^2} + \left(\frac{b_{22} - b_{21}}{f_0^3} + \ldots \right) \right]$$

Fazendo-se $$a_i = \frac{b_{i2} - b_{i1}}{c},$$

onde os índices i são os instantes considerados (i = 1,2,3,...) e os índices 1 e 2 são duas posições sucessivas do satélite ao longo de sua órbita, tem-se:

$$\Delta N_{OBS} - \Delta N_{VÁCUO} = \frac{a_1}{f_o} + \frac{a_2}{f_o^2} + \frac{a_3}{f_o^3} + \ldots \qquad (4.12)$$

A determinação dos coeficientes "a_i" fundamenta-se na circunstância dos mesmos independerem da frequência. Os satélites, irradiando duas frequências, permitem eliminar o valor corretivo. Desprezando-se os termos de 2ª ordem e superiores, o problema é resolvido somente com as duas frequências.

Seja, por exemplo, o caso dos satélites TRANSIT, que irradiam as frequências de 400 e 150 MHz.

Tem-se, portanto,

$$\Delta N_{OBS} - \Delta N_{VÁCUO} = \frac{a_1}{f_o} \quad . \qquad (4.13)$$

Para a frequência de 400 MH_z,

$$\Delta N^{400}_{OBS} - \Delta N^{400}_{VÁCUO} = \frac{a_1}{f_{400}} \quad , \qquad (4.14)$$

e, para a freqüência de 150 MHz,

$$\Delta N^{150}_{OBS} - \Delta N^{150}_{VÁCUO} = \frac{a_1}{f_{150}} \quad . \qquad (4.15)$$

Pode-se reescrever a Equação 4.15 da forma

$$\Delta N^{150}_{OBS} - \frac{3}{8}\ \Delta N^{400}_{VÁCUO} = \frac{a_1}{\frac{3}{8} f_{400}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{a_1}{f_{400}} \quad ,$$

portanto,

$$\frac{3}{8}\left(\Delta N^{150}_{OBS} - \frac{3}{8}\,\Delta N^{400}_{VÁCUO}\right) = \frac{a_1}{f_{400}} \quad . \tag{4.16}$$

Igualando-se as Equações 4.14 e 4.16, tem-se

$$\Delta N^{150}_{OBS} - \frac{3}{8}\,\Delta N^{400}_{VÁCUO} = \frac{8}{3}\left(\Delta N^{400}_{OBS} - \Delta N^{400}_{VÁCUO}\right),$$

$$\text{ou} \quad \Delta N^{150}_{OBS} - \frac{3}{8}\,\Delta N^{400}_{VÁCUO} = \frac{8}{3}\,\Delta N^{400}_{OBS} - \frac{8}{3}\,\Delta N^{400}_{VÁCUO} \ ,$$

donde se explicita o valor de $\Delta N^{400}_{VÁCUO}$, que assume a forma

$$\Delta N^{400}_{VÁCUO} = \frac{64\,\Delta N^{400}_{OBS} - 24\,\Delta N^{150}_{OBS}}{55} \quad , \tag{4.17}$$

que representa a fórmula padrão válida para qualquer receptor TRANSIT.

Os receptores TRANSIT atualmente no mercado não fornecem a contagem Doppler diretamente para 150 MHz. Seja, por exemplo, o receptor MAGNAVOX MX-1502, o qual fornece as contagens da seguinte maneira:

$$\Delta N_{ALTA} = \Delta N_1 = \Delta N^{400}_{OBS}$$

e

$$\Delta N_{BAIXA} = \Delta N_2 = \frac{8}{3}\,\Delta N^{150}_{OBS} \ ,$$

sendo estas contagens obtidas pela integração da freqüência Doppler $(f_0 - f_{150})$, ou seja, o valor observado é N_{150} , porém, através de circuitos eletrônicos, esse valor é multiplicado por 8/3. Assim o número de ciclos de 150 MHz que é gravado na mensagem é $8/3\ N_{150}$. Logo, tem-se

$$\Delta N^{400}_{OBS} = \Delta N_1$$

e

$$\Delta N^{150}_{OBS} = \frac{3}{8}\,\Delta N_2 \ ,$$

que, substituindo-se na fórmula padrão, resulta

$$\Delta N_{VÁCUO}^{400} = \frac{64\ \Delta N_1 - 9\ \Delta N_2}{55}$$

3. Redução devida à refração troposférica

Foi visto anteriormente que a troposfera é uma "concha" esférica de gases extendendo-se da superfície da Terra até cerca de 40 Km de altitude. É constituída de Nitrogênio (< 80%), Oxigênio (< 20%), com pequenas quantidades dos gases nobres (Hélio, Neônio, Argônio, Kriptônio, Xenônio e Radônio), além de Hidrogênio, Amônia, Dióxido de Carbono, Monóxido de Carbono, Vapor d'Água e, provavelmente, alguns poluentes.

O índice de refração da troposfera é, usualmente, assumido como obedecendo a equação de Lorenz-Lorentz

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \sum Re_i \quad \rho_i \ , \qquad (4.18)$$

onde "n" é o índice de refração," ρ_i" é a densidade parcial do i-ésimo gás na mistura existente na troposfera e" Re_i" é refratividade específica do i-ésimo gás.

Um modelo adequado para a refração troposférica pode ser obtido assumindo-se que existem apenas 3 (três) gases constituintes: "dióxido de carbono", "vapor d'água" e "ar seco livre de dióxido de carbono", este último agregando todos os outros gases. A densidade parcial de cada um desses elementos é relacionada à temperatura e pressão parcial de cada constituinte. Como a medição da quantidade de dióxido de carbono não é um simples procedimento de campo, é usual assumir-se que a troposfera possui 0,03% de

dióxido de carbono. Em virtude do índice de refração troposférico ser muito próximo da unidade (n ≅ 1,003), o lado esquerdo da equação de Lorenz-Lorentz pode ser aproximado por

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = (n - 1)\frac{(n + 1)}{(n^2 + 2)} \simeq \frac{2}{3}(n - 1) \qquad (4.19)$$

A fórmula empírica de Smith e Weintraub (1953) baseada nessas considerações é

$$Re = (n - 1)\ 10^6 = \frac{77,6}{T}\left(P + \frac{4810\ e}{T}\right), \qquad (4.20)$$

onde "Re" é refratividade, "T" é a temperatura em graus Kelvin, "P" é a pressão em milibares e "e" é a pressão parcial do vapor d'água em milibares.

Separando em suas componentes seca e úmida, tem-se

$$Re = Re_d + Re_w = 77,6\frac{P}{T_d} + 77,6(4810)\frac{e}{T_d^2}, \qquad (4.21)$$

onde os índices "d" e "w" indicam respectivamente seco ("dry") e úmido ("wet").

"T_d e "P" podem ser medidos diretamente, o mesmo não ocorrendo com "e", a qual pode ser calculada pela medição da temperatura úmida, através da fórmula empírica (Smithsonian, 1971)

$$e = e_w - 4,5 \cdot 10^{-4}\ (1 + 1,68 \cdot 10^{-3}\ T_w)(T_d - T_w)P_o, \qquad (4.22)$$

onde e_w é a pressão de saturação do vapor d'água, podendo ser calculada por (Goff e Gratch, 1946).

$$e_w = e_{ws}\left(\frac{T_s}{T_w}\right)^{5,02808} \exp\left[-g\left(T_w\right)\right], \qquad (4.23)$$

na qual T_s é a temperatura do ponto de vapor (100°C ou 373,16°K), e_{ws} é a

pressão de saturação do vapor à temperatura T_s (1.013,2 mb), e $g(T_w)$ é dado pela expressão

$$g(T_w) = g_1(T_w) + g_2(T_w) + g_3(T_w), \tag{4.24}$$

sendo

$$g_1(T_w) = 18,19728\left(\frac{T_s}{T_w} - 1\right), \tag{4.25}$$

$$g_2(T_w) = 0,0187265\left\{1 - \exp\left[-8,03945\left(\frac{T_s}{T_{w1}} - 1\right)\right]\right\}, \tag{4.26}$$

e

$$g_3(T_w) = 3,1813\text{x}10^{-7}\left\{\exp\left[26,1205\left(1 - \frac{T_w}{T_s}\right)\right] - 1\right\}. \tag{4.27}$$

Devido à não homogeneidade, o índice de refração troposférico possui duas características

- o perfil vertical
- a variabilidade horizontal

A pressão e a temperatura têm perfis verticais que podem ser modelados, porém a pressão do vapor d'água não. As variações horizontais para todos os três são as mais difíceis de serem representadas por modelos.

A seguir, desenvolver-se-á um perfil vertical para a refratividade seca, a partir dos perfis da pressão e temperatura. É usual aceitar-se que a variação de temperatura em relação à variação de altura é constante

$$\frac{dT}{dh} = -\alpha \tag{4.28}$$

e que a variação da pressão em relação à altura é proporcional à densidade

$$\frac{dP}{dh} = -Pg, \tag{4.29}$$

onde "g" é a aceleração da gravidade.

Da lei dos gases perfeitos (equação de Clapeyron), tem-se que

$PV = RT$ (para 1 mol de substância),

ou

$$\rho = \frac{1}{V} = \frac{P}{RT}$$

onde "R" é a constante dos gases

Integrando-se a Equação 4.28 do geóide até a altura "h", tem-se

$$T = T_o - \alpha h \tag{4.30}$$

Usando a Equação 4.30 e integrando a 4.29 da superfície do geóide até a altura "h", e assumindo "g" como constante, tem-se

$$P = P_o \left[\frac{\frac{T_o}{\alpha} - h}{\frac{T_o}{\alpha}} \right]^{\frac{g}{R.\alpha}} \tag{4.31}$$

Levando as Equações 4.30 e 4.31 na Equação 4.21, obtém-se para o perfil de Re_d:

$$Re_d = Re_{o_d} \left[\frac{\frac{T_o}{\alpha} - h}{\frac{T_o}{\alpha}} \right]^{\frac{g}{R.\alpha} - 1}$$

ou

$$Re_d = K_d \, (h_d - h), \tag{4.32}$$

onde $$r = \frac{g}{R\alpha} - 1;$$

h_d = altura $\left(\frac{T_o}{\alpha} \right)$ para a qual $T = 0$;

K_d = função das medidas na superfície de T_0 e P_0 .

3.1 - O modelo de Hopfield:

Ver-se-á agora o modelo de redução Doppler derivado da Equação 4.32, desenvolvido por Hopfield.

Usando a citada Equação, Hopfield (1969) observou que o valor inteiro de μ, para o qual o cálculo das alturas derivadas da Refratividade seca próximo à superfície melhor se aproxima dos perfis observados da Refratividade seca, é igual a 4, e posteriormente (1972) observou que o valor h_d para o qual o cálculo de Re_d melhor se aproxima dos valores observados é dado, em metro, por

$$h_d = 40136 + 148{,}72\ (T_0 - 273{,}16), \tag{4.33}$$

onde T_0 é a temperatura da supefície em graus Kelvin. Assim :

$$K_d = \frac{Re_{0_d}}{(h_d - H)^4},$$

logo,

$$Re_d = \frac{Re_{0_d}}{(h_d - H)^4}\ (h_d - h)^4, \tag{4.34}$$

onde "Re_d" e "H" são a refratividade seca e a altura ortométrica (geoidal) em metros da estação observada, respectivamente; "h" é a altura elipsóidica; $h \leq h_d$; e "h_d" é dada pela Equação 4.33.

O gradiente da pressão do vapor d'água não pode ser modelado tão simplesmente como os gradientes de "T" e "P", então Hopfield (1969) assumiu simplesmente uma relação análoga àquela que foi usada para a refratividade seca

$$Re_w = \frac{Re_{0_w}}{(h_w - H)^4}\ (h_w - h)^4, \tag{4.35}$$

onde $h \leq h_w$ e h_w = 11.000 metros (Hopfield, 1972).

Desprezando a refratividade devida à curvatura, a contribuição da troposfera ao longo da trajetória é

$$\Delta s = \int (n - 1)ds = \int_{r_0}^{r_{tro}} Re \cdot 10^{-6} \frac{ds}{dr} \, dr$$

integrada ao longo da trajetória geométrica, onde "r_0" é raio vetor da estação de observação e "r_{tro}" é o raio a partir do qual Re é desprezível, podendo ser estipulado como 30 km, por exemplo.

Δs pode ser expressa em função de suas componentes "seca" e "úmida"

$\Delta s = \Delta s_d + \Delta s_w$.

Usando as equações 4.34 e 4.35 para Re_d e Re_w , tem-se

$$\Delta s_i = \int_{r_0}^{r_{tro_i}} Re_i \times 10^{-6} \frac{ds}{dr} \cdot dr = \frac{Re_i \times 10^{-6}}{(h_i - H)^4} \int_{r_0}^{r_{tro_i}} (h_i - h)^4 \frac{ds}{dr} \cdot dr, \qquad (4.36)$$

onde os valores dos índices são i = 1 e 2 para as componentes seca e úmida, respectivamente; e Re_{o_i} é a refratividade na região da estação de observação.

Fazendo

$$h_{tro_i} = r_{tro_i} - r_0 = h_i - H \qquad (4.37)$$

e

$$x = h - h_i = r_0 - r_{tro_i} \, , \qquad (4.38)$$

tem-se

$$\Delta s_i = \frac{Re_{o_i} \times 10^{-6}}{h_{tro_i}^4} \int_{-h_{tro_i}}^{o} \frac{ds}{dr} \, x^4 \, dx \, . \qquad (4.39)$$

Para uma trajetória com ângulo de elevação E, conforme a Figura 4.2, verifica-se que

$$r^2 = (r_o \cos E)^2 + (r_o \operatorname{sen} E + s)^2 = l_2^2 + (l_1 + s)^2$$

ou

$$s = \sqrt{r^2 - l_2^2} - l_1 \, ,$$

que, derivada em relação a "r", resulta

$$\frac{ds}{dr} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - l_2^2}} \quad . \tag{4.40}$$

Usando a Equação 4.38, tem-se

$$\frac{ds}{dr} = \frac{(r_{tro_i} + x)}{\sqrt{(r_{tro_i} + x)^2 - l_2^2}} \quad ,$$

logo,

$$\Delta s_i = \frac{Re_{o_i} \times 10^{-6}}{h_{tro_i}^4} \int_{-h_{tro_i}}^{o} \frac{\left(r_{tro_i} + x\right)^4 dx}{\sqrt{(r_{tro_i} + x)^2 - l_2^2}} \tag{4.41}$$

sendo a valorização desta integral discutida mais adiante.

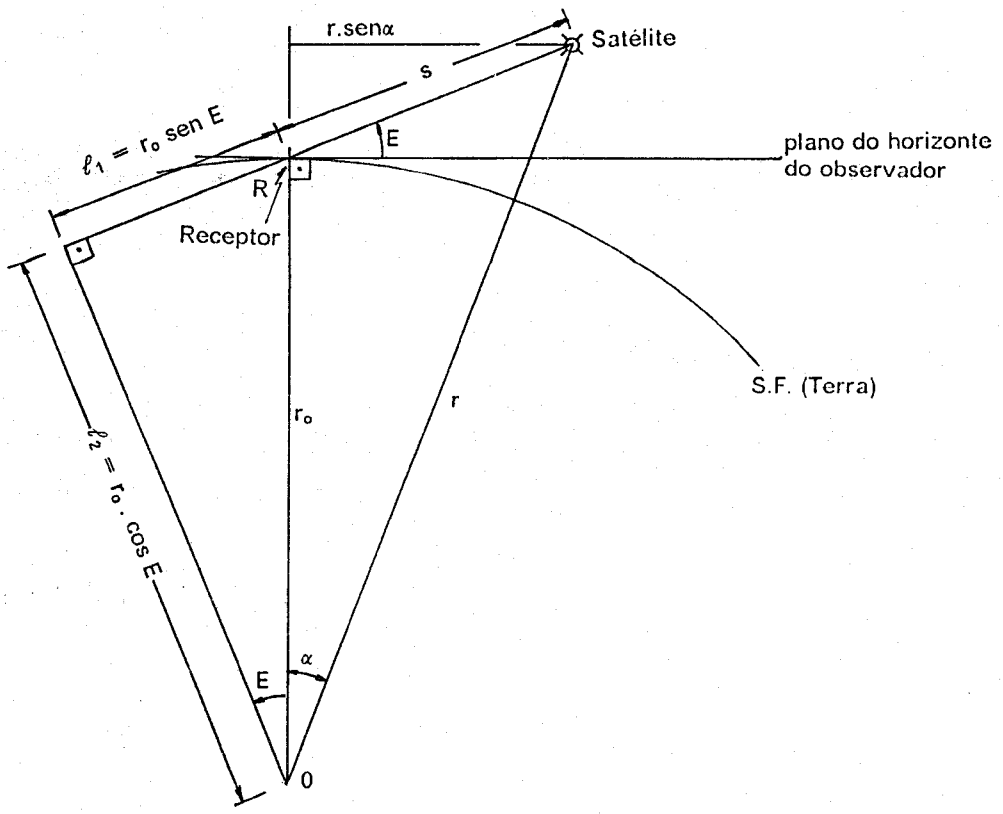


Fig. 4.2 - Geometria da refração troposférica, segundo Hopfield.

Fazendo um cálculo análogo ao da Equação 4.12, tem-se

$$\Delta N_{OBS} - \Delta N_{VÁCUO} = \frac{f_0}{c}\left(\Delta s_{d_2} + \Delta s_{w_2} - \Delta s_{d_1} - \Delta s_{w_1}\right). \qquad (4.42)$$

3.2- Algoritmo de Yionoulis para o modelo de Hopfield

Embora a Equação 4.41 possa ser integrada, as expressões obtidas levam a sérios erros de arredondamentos para as altas elevações.

Yionoulis (1970) determinou duas expansões em série para a integração, uma para baixas elevações e outra para altas elevações, as quais, quando integradas termo a termo, eliminam o problema de arredondamento.

Seu algoritmo para altas elevações é :

$$\Delta s_i = Re_{o_i} \times 10^{-6}\left\{W_i - l_1 - \frac{0{,}8\, h_{tro_i}\, r_{tro_i}}{W_i} - W_i \sum_{P=1}^{NP} \frac{1}{p+S} \cdot \left(\frac{h_{tro_i}}{V_i}\right)^{p+1} \cdot \left[2G\,(p+1)\left(1 + \left(\frac{V_i}{U_i}\right)^{p+1}\right) - \sum_{n=1}^{p} G(n).G(p-n+1) \cdot \left(\frac{V_i}{U_i}\right)^{n}\right]\right\} \qquad (4.3)$$

e o algoritmo para baixas elevações é:

$$\Delta s_i = Re_{o_i} \times 10^{-6}\left\{-l_1 + 4\, V_i \left(\frac{V_i}{h_{tro_i}}\right)^4 \left(\frac{U_i}{V_i} - 1\right)^{1/2} \cdot \sum_{n=1}^{4} C(n) \cdot \left[\frac{2}{2n+1} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{h_{tro_i}}{V_i}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right] + \sum_{p=1}^{NP} \left(-1\right)^{p-1} \frac{G\,(p)}{+2(p+n)} \cdot \left(\frac{U_i}{V_i} - 1\right)^{-p} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{h_{tro_i}}{V_i}\right)^{p+n+\frac{1}{2}}\right)\right\}, \qquad (4.44)$$

onde $U_i = r_{tro_i} + l_2$

$V_i = r_{tro_i} - l_2$

$$W_i = \sqrt{U_i \cdot V_i} = \sqrt{U_i \cdot V_i}$$

$$G(k) = \frac{(2k)!}{(k!)^2\, 2^{2k} \left(k - \frac{1}{2}\right)} = \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{64}, \ldots\right\},$$

para k = 1, 2, 3, 4,...

$$C(k) = \left\{1, -3, 3, -1\right\}, \text{ para } k = 1, 2, 3, 4,$$

e os somatórios das séries consistem de NP termos, sendo NP suficientemente grande para proporcionar a convergência das séries dentro dos limites de tolerância desejados.

A convergência destas duas séries foram estudadas para determinar-se o ângulo de mudança de elevação ótimo entre elas, e os valores mínimos de NP que proporcionam a convergência com erro negligenciável (tomado como sendo 1mm).

As convergências foram avaliadas por comparação de valores calculados de Δs_i usando um valor "infinito" para NP (NP = 10).

Para valores iguais de NP, a Equação 4.44 requer pelo menos três vezes mais operações aritméticas do que a Equação 4.43. Para elevações médias, a Equação 4.43 converge com um NP menor do que a Equação 4.44. Em conseqüência, é desejável maximizar o uso da Equação 4.43, procurando o mais baixo possível ângulo de mudança de elevação (alta para baixa).

Para $T_o \in [273\ K;\ 303\ K]$, $P_o \in [950\ mb;\ 1050\ mb]$, $e \in [0;25mb]$, $H \in [0;\ 1000\ m]$ e $r_o \in [6356\ Km;\ 6378\ Km]$, foi encontrado que Δs_1 (componente

seco) converge dentro de 1mm, se

- A Equação 4.43 for usada para elevação ≥ 17° e a Equação 4.44 for usada para elevação < 17°;
- NP = 3 para a Equação 4.43 e for usada para elevação < 17°;
- NP = 2 para a Equação 4.44;

e que Δs_2 (componente úmido) converge dentro de 1mm, se

- Equação 4.43 for usada para elevação ≥ 7° e Equação 4.44 for usada para elevação < 7°;
- NP = 3 para a Equação 4.43 e
- NP = 1 para a Equação 4.44.

A Figura 4.3 mostra a dependência de Δs em função da elevação para T_o = 290 K, P_o = 1015 mb, e = 15 mb, H = 0 e r_o = 6.365.000 m

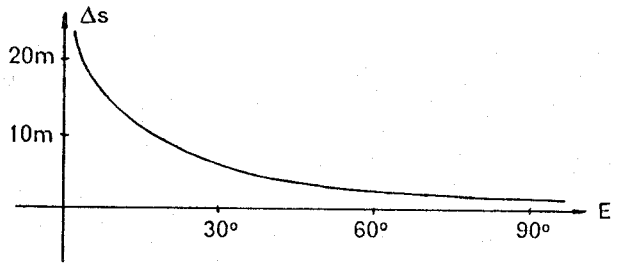


Fig. 4.3 - Correção troposférica x elevação

3.3- Modelo simplificado de Hopfield.

A correção troposférica zenital é uma expressão particularmente simples. No zenit do lugar, a elevação é 90°, e portanto, l_2 é nulo. Fazendo l_2 = 0, na Equação 4.41 tem-se :

$$K_i = \Delta s_i = \int (n-1)dh = \frac{Re_{o_i} \times 10^{-6}}{h^4_{tro_i}} \int_{-h_{tro_i}}^{0} . x^4 \, dx = \frac{Re_{o_i} \times h_{tro_i} \times 10^{-6}}{5},$$

e, das Equações 4.20 e 4.36 (Hopfield, 1971), tem-se

$$K_d = 77,6 \, . \, \frac{P_o}{T_o} \, . \, \frac{(h_d - H)}{5} \times 10^{-6} \text{ m} \qquad (4.45)$$

e

$$K_w = 77,6 \, . \, (4810) \, . \, \frac{c}{T_o^2} \cdot \frac{(h_w - H)}{5} \, . \, 10^{-6} \text{ m}, \qquad (4.46)$$

onde "h_d", é dado pela Equação 4.33 e "h_w" é igual a 11.000 m, "T_o", "P_o", "c" e "H" são os valores para temperatura, pressão, pressão de saturação do vapor d'água e altura ortométrica na estação de observação (rastreamento).

Pode-se usar as correções zenitais para outros ângulos de elevação, visto que, para $E \neq 90^o$,

$$\Delta s_i = \int (n-1) \frac{ds}{dh} \, . \, dh,$$

e, da Figura 4.1,

$$\frac{ds}{dh} = \frac{ds}{dr} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - l_2^2}} = \frac{1}{\text{sen } (E + \alpha)},$$

logo,

$$\Delta s_i = \frac{K_i}{\text{sen } (E + \alpha)}$$

Da Figura 4.1, tem-se

$$\alpha = \cos^{-1}\left[\frac{x_o x + y_o y + z_o z}{r_o \, r}\right], \qquad (4.47)$$

onde (x_o, y_o, z_o) são as coordenadas estimadas (a priori) do receptor e (x, y, z) são as coordenadas do satélite artificial no instante considerado.

Tem-se, também, que a elevação "E" está relacionada com o ângulo "α" pela relação

$$tg\ (90^\circ - E) = \frac{r\ sen\ \alpha}{r\ cos\ \alpha - r_o} \quad ,$$

ou

$$tg\ E = \frac{r\ cos\ \alpha - r_o}{r\ sen\ \alpha} \quad . \tag{4.48}$$

O modelo matemático simplificado estabelecido por Hopfield (1971) é

$$\Delta s_i = \frac{K_i}{sen\ (E^2 + \theta_i^2)^{1/2}} \quad , \tag{4.49}$$

onde i = d,w, conforme se trate da componente seca ou úmida, respectivamente, $\theta_d = 2{,}5^\circ$, $\theta_w = 1{,}5^\circ$, e K_d e K_w são obtidos pelas Equações 4.45 e 4.46, respectivamente.

Estas fórmulas aproximadas dão uma precisão de aproximadamente 40 cm, enquanto que as fórmulas rigorosas permitem uma precisão de 1mm.

Finalmente, a contagem Doppler integrada (entre os instantes t_1 e t_2, no vácuo) é obtida aplicando à Contagem Doppler já corrigida dos efeitos da ionosfera (vista anteriormente), a correção de redução devida aos efeitos da troposfera. Assim:

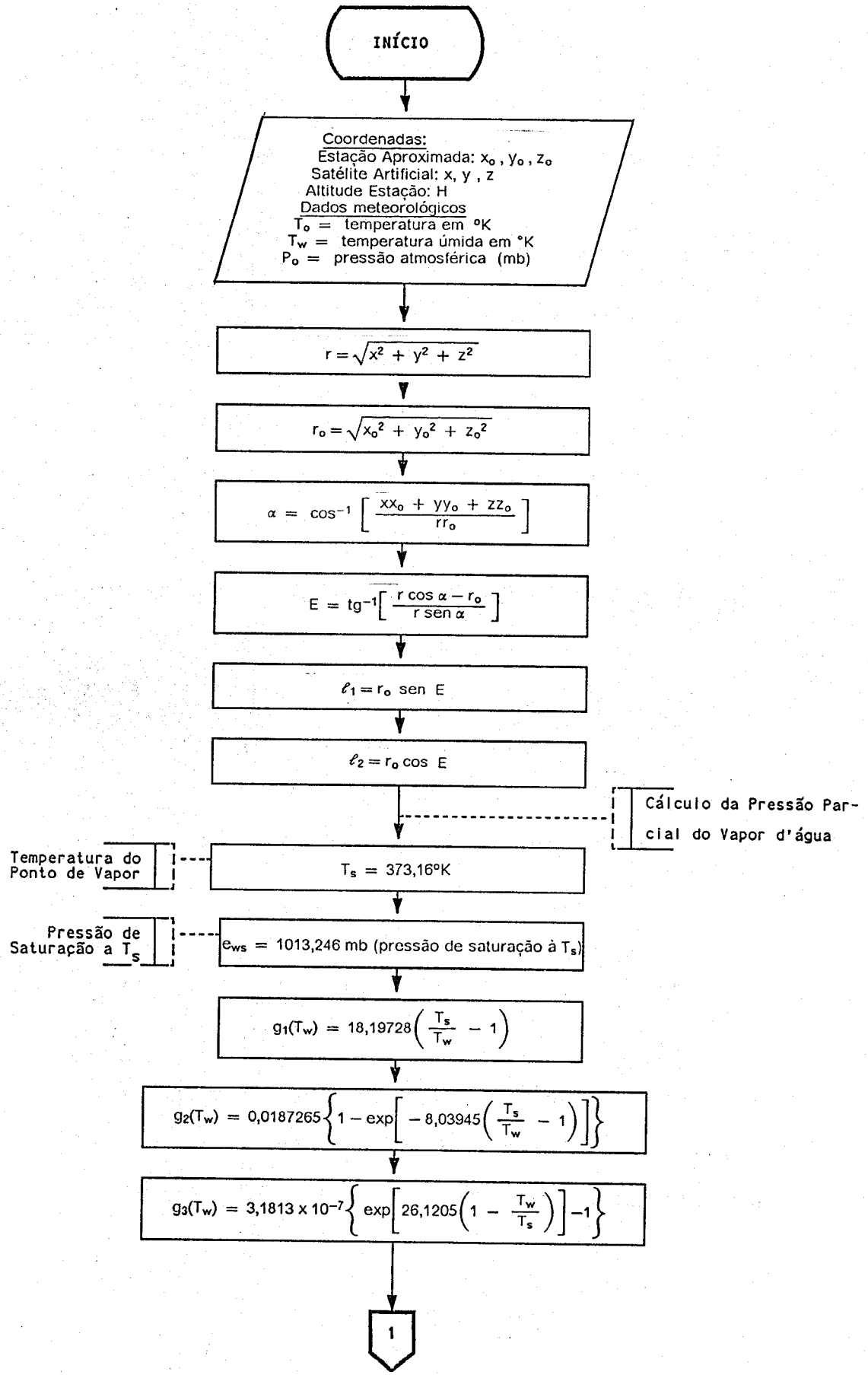
$$\Delta N_{vácuo} = \Delta N_{ionosf} - \frac{f_o}{c} (\Delta s_{d_2} + \Delta s_{w_2} - \Delta s_{d_1} - \Delta s_{w_1}) \tag{4.50}$$

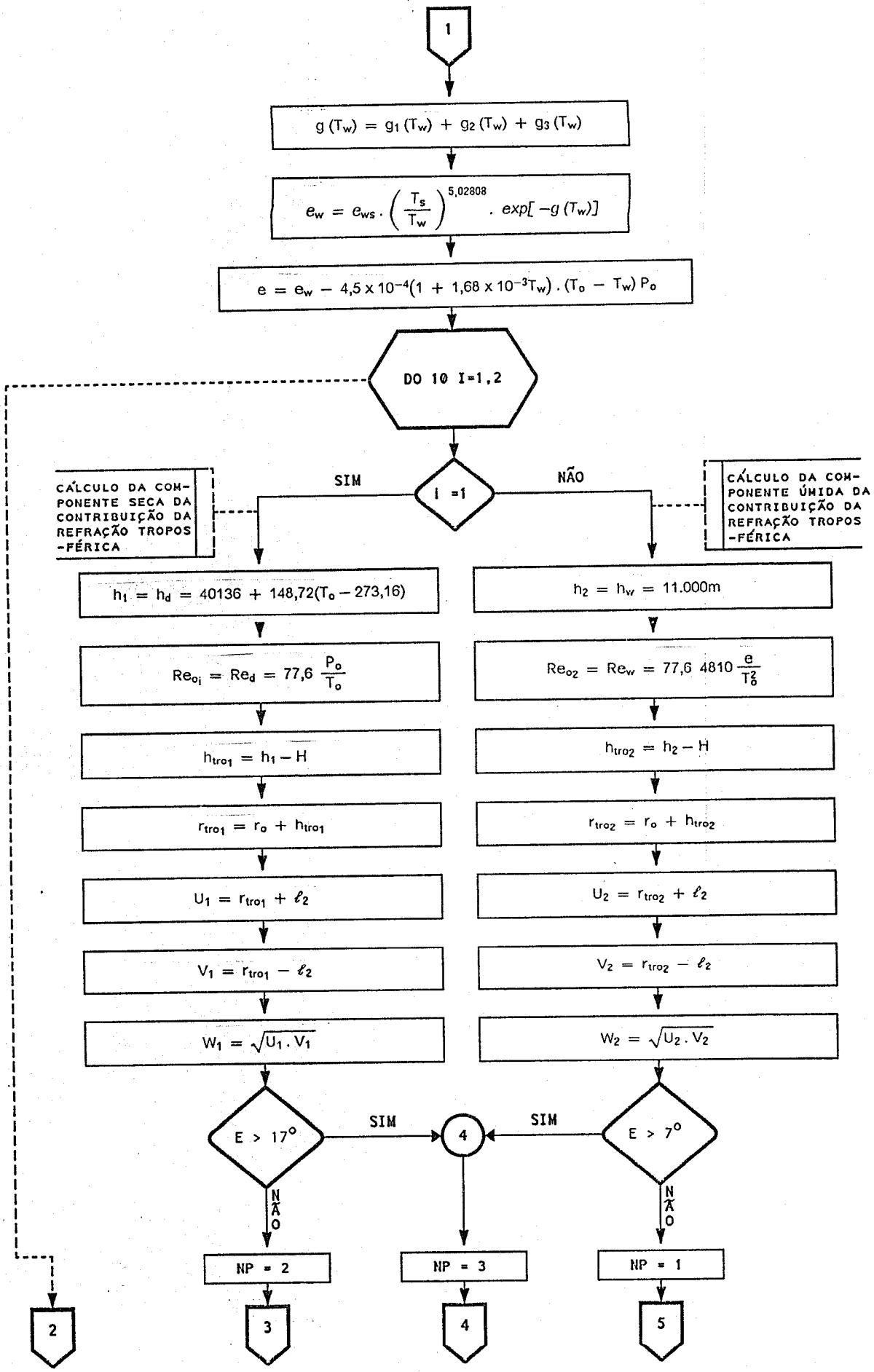
Apresentam-se, a seguir os fluxogramas para os cálculos da redução devida à refração troposférica, utilizando os algoritmos de Yiounoulis para o cálculo rigoroso (precisão 1 mm) e para o cálculo aproximado (precisão 40 cm).

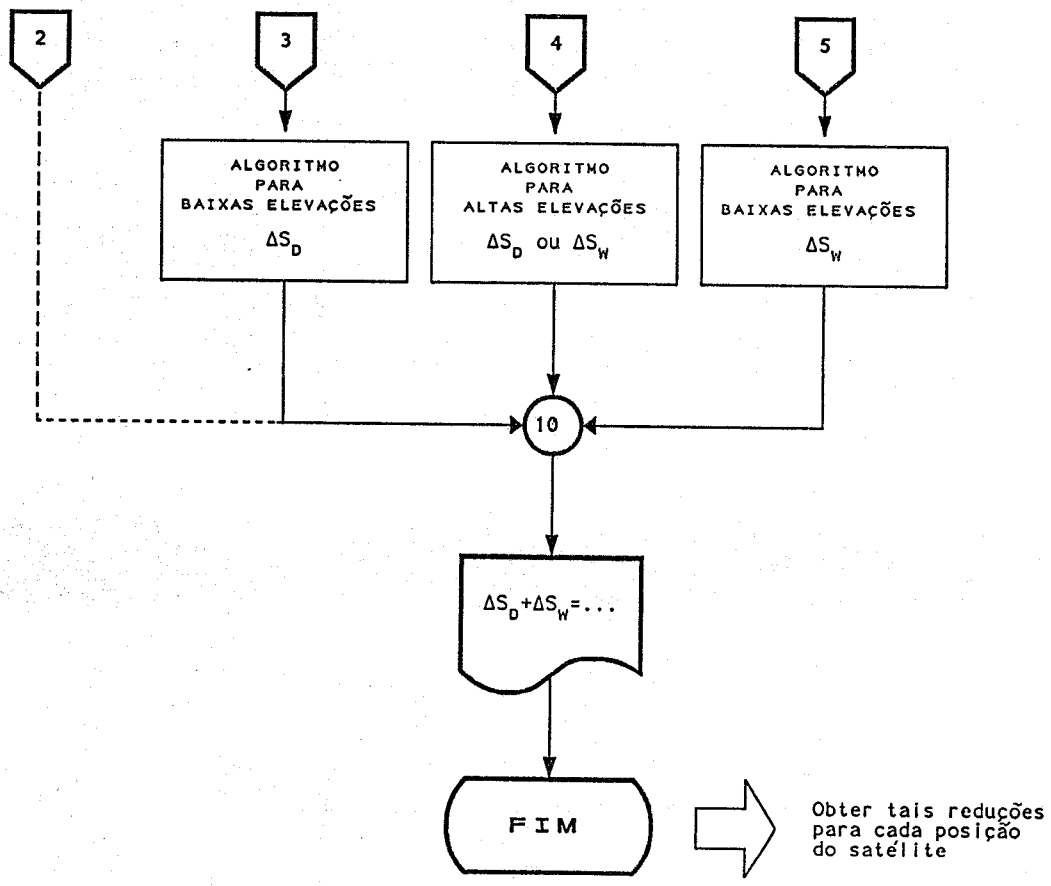
MODELO COMPLETO DE HOPFIELD

Roteiro de Cálculo para Redução devida à Refração Troposférica

(Cálculo Rigoroso)



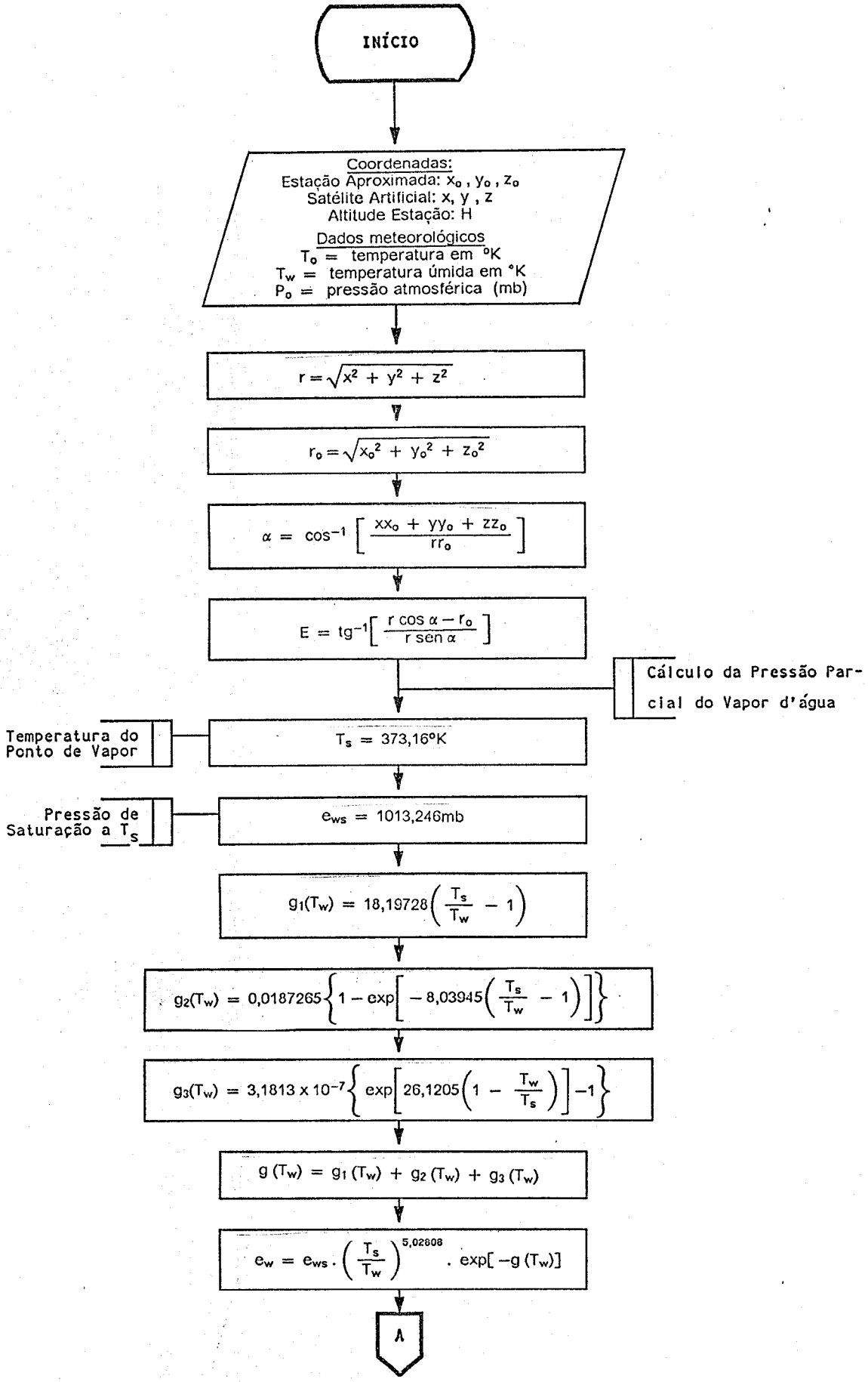

1
$g(T_w) = g_1(T_w) + g_2(T_w) + g_3(T_w)$
$e_w = e_{ws} \cdot \left(\frac{T_s}{T_w}\right)^{5,02808} \cdot exp[-g(T_w)]$
$e = e_w - 4,5 \times 10^{-4}(1 + 1,68 \times 10^{-3} T_w) \cdot (T_o - T_w) P_o$
DO 10 I=1,2
I =1
SIM
NÃO
CÁLCULO DA COMPONENTE SECA DA CONTRIBUIÇÃO DA REFRAÇÃO TROPOSFÉRICA
CÁLCULO DA COMPONENTE ÚMIDA DA CONTRIBUIÇÃO DA REFRAÇÃO TROPOSFÉRICA
$h_1 = h_d = 40136 + 148,72(T_o - 273,16)$
$h_2 = h_w = 11.000m$
$Re_{oi} = Re_d = 77,6 \frac{P_o}{T_o}$
$Re_{o2} = Re_w = 77,6\ 4810 \frac{e}{T_o^2}$
$h_{tro1} = h_1 - H$
$h_{tro2} = h_2 - H$
$r_{tro1} = r_o + h_{tro1}$
$r_{tro2} = r_o + h_{tro2}$
$U_1 = r_{tro1} + \ell_2$
$U_2 = r_{tro2} + \ell_2$
$V_1 = r_{tro1} - \ell_2$
$V_2 = r_{tro2} - \ell_2$
$W_1 = \sqrt{U_1 \cdot V_1}$
$W_2 = \sqrt{U_2 \cdot V_2}$
E > 17°
SIM
4
SIM
E > 7°
NÃO
NÃO
NP = 2
NP = 3
NP = 1
2
3
4
5

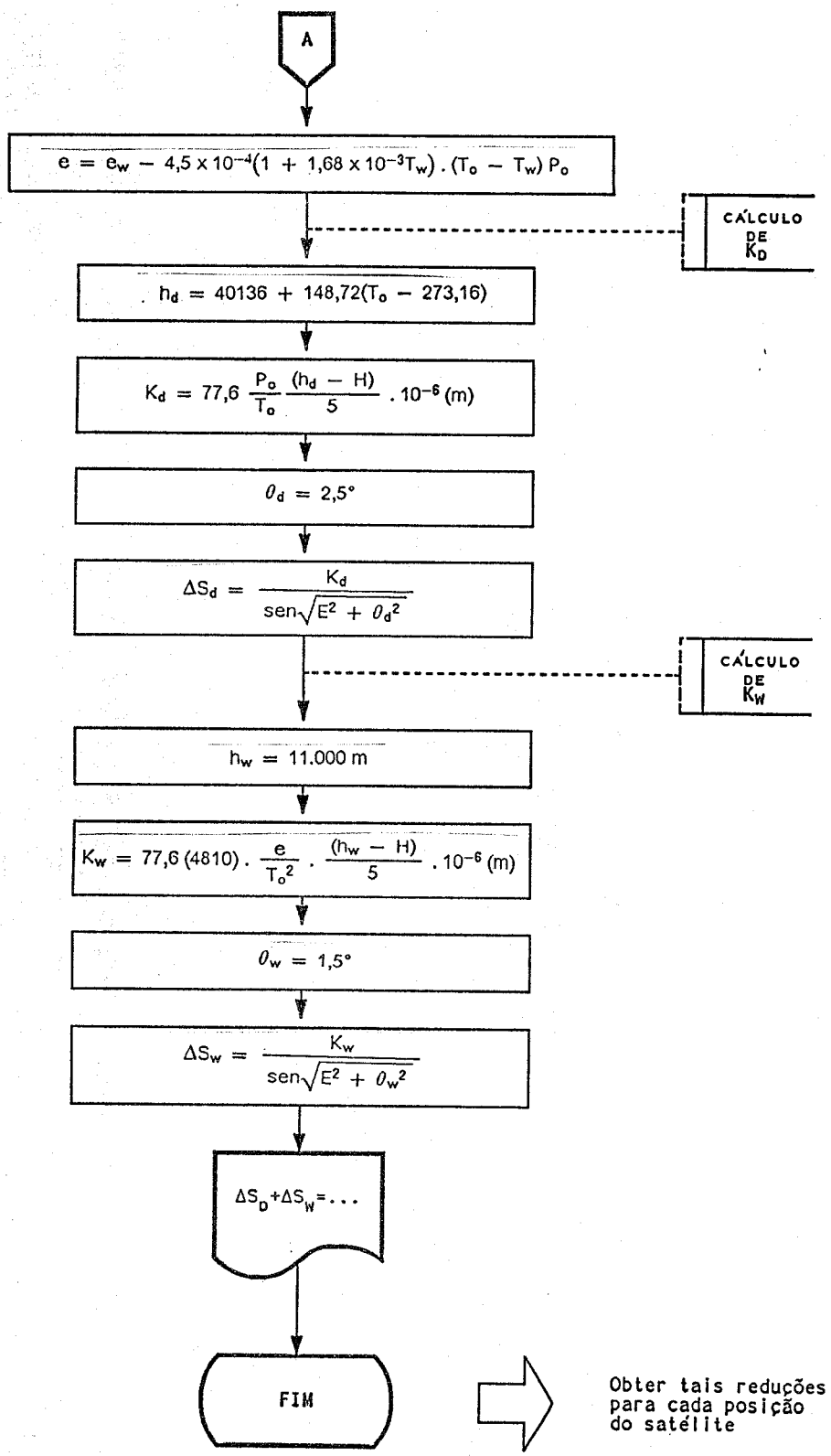

2
3
4
5
ALGORITMO PARA BAIXAS ELEVAÇÕES
ΔS_D
ALGORITMO PARA ALTAS ELEVAÇÕES
ΔS_D ou ΔS_W
ALGORITMO PARA BAIXAS ELEVAÇÕES
ΔS_W
10
$\Delta S_D + \Delta S_W = \ldots$
FIM
Obter tais reduções para cada posição do satélite

MODELO SIMPLIFICADO DE HOPFIELD

Roteiro de Cálculo para Redução devida à Refração Troposférica

(Cálculo Simplificado)




A
$e = e_w - 4{,}5 \times 10^{-4}(1 + 1{,}68 \times 10^{-3} T_w) \cdot (T_o - T_w) P_o$
CÁLCULO DE K_D
$h_d = 40136 + 148{,}72(T_o - 273{,}16)$
$K_d = 77{,}6 \frac{P_o}{T_o} \frac{(h_d - H)}{5} \cdot 10^{-6}$ (m)
$\theta_d = 2{,}5°$
$\Delta S_d = \frac{K_d}{\text{sen}\sqrt{E^2 + \theta_d^2}}$
CÁLCULO DE K_W
$h_w = 11.000$ m
$K_w = 77{,}6\,(4810) \cdot \frac{e}{T_o^2} \cdot \frac{(h_w - H)}{5} \cdot 10^{-6}$ (m)
$\theta_w = 1{,}5°$
$\Delta S_w = \frac{K_w}{\text{sen}\sqrt{E^2 + \theta_w^2}}$
$\Delta S_D + \Delta S_W = \ldots$
FIM
Obter tais reduções para cada posição do satélite

3.4. Exercícios de aplicação.

01 - Calcular a correção troposférica (em metros) para um instante em que as coordenadas do satélite são

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 773.886 \\ -3.947.421 \\ 6.257.135 \end{bmatrix} \text{ m,}$$

e as coordenadas aproximadas estimadas da estação são

$$\begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.018.886. \\ -4.069.306 \\ 4.462.190 \end{bmatrix} \text{ m, e H = 200 m.}$$

Na estação, foram medidos os seguintes dados metereológicos :

$$T_o = 301^oK;\ T_w = 298,5^oK;\ P_o = 1020 \text{ mb.}$$

Usar o modelo completo de Hopfield com o cálculo rigoroso.

Solução:

a) Cálculos preliminares

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow r = 7.438.600,036 \text{ m}$$

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \Rightarrow r_0 = 6.367.597,004 \text{ m}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left[\frac{xx_0 + yy_0 + zz_0}{rr_0}\right] \Rightarrow \alpha = 15,93382706 \text{ graus}$$

$$E = tg^{-1}\left[\frac{r\cos\alpha - r_0}{r\,\text{sen}\,\alpha}\right] \Rightarrow E = 21,03227684 \text{ graus} \Rightarrow \therefore \underline{E > 17^o}$$

$$l_1 = r_0 \text{ sen } E \Rightarrow l_1 = 2.285.291,170 \text{ m} \qquad \boxed{1}$$

$$l_2 = r_0 \cos E \Rightarrow l_2 = 5.943.377,481 \text{ m}$$

b) Cálculo da pressão de saturação do vapor d'água

$T_s = 373,16\ ^0K$ (temp. do ponto de vapor)

$e_{ws} = 1013,246$ mb (pressão de saturação à temperatura T_s)

$$g_1(T_w) = 18,19728 \left(\frac{T_s}{T_w} - 1 \right) \Rightarrow g_1 = 4,551453686$$

$$g_2(T_w) = 0,0187265 \left\{ 1 - \exp \left[-8,03945 . \left(\frac{T_s}{T_w} - 1 \right) \right] \right\} \Rightarrow g_2 = 0,016219381$$

$$g_3(T_w) = 3,1813 \times 10^{-7} \left\{ \exp \left[26,1205 . \left(1 - \frac{T_w}{T_s} \right) \right] - 1 \right\} \Rightarrow g_3 = 0,000058873$$

$$g(T_w) = g_1(T_w) + g_2(T_w) + g_3(T_w) \Rightarrow g(T_w) = 4,567731940$$

$$e_w = e_{ws} \left(\frac{T_s}{T_w} \right)^{5,02808} . \exp \left[-g(T_w) \right] \Rightarrow e_w = 32,31842913 \text{ mb}$$

$$e = e_w - 4,5 \times 10^{-4} (1 + 1,68 \times 10^{-3} T_w) (T_0 - T_w) P_0 \Rightarrow e = 30,59548083 \text{ mb}$$

c) Cálculo da componente seca - Δs_d

$$h_d = 40136 + 148,72 (T_o - 273,16) \Rightarrow h_d = 44.276,3648\text{m}$$

$$Re_d = 77,6 \frac{p_o}{T} \Rightarrow Re_d = 262,9634552 \quad \boxed{2}$$

$$h_{tro_d} = h_d - H \Rightarrow h_{tro_d} = 44.076,3648\text{m} \quad \boxed{3}$$

$$r_{tro_d} = r_o + h_{tro_d} \Rightarrow r_{tro_d} = 6.411.673,369\text{m} \quad \boxed{5}$$

$$U_d = r_{tro_d} + l_2 \quad \Rightarrow \quad U_d = 12.355,050,85 \text{ m} \qquad \boxed{4}$$

$$V_d = r_{tro_d} - l_2 \quad \Rightarrow \quad V_d = 468.295,888 \text{ m} \qquad \boxed{7}$$

$$W_d = \sqrt{U_d \cdot V_d} \quad \Rightarrow \quad W_d = 2.405.373,050 \text{ m} \qquad \boxed{8}$$

$E > 17^\circ \Rightarrow NP = 3$ (algoritmo para altas elevações)

$$\Delta s_d = \boxed{2} \times 10^{-6} \left\{ \boxed{8} - \boxed{1} - \frac{0,0\ \boxed{3}\ \boxed{5}}{\boxed{8}} - \left(\boxed{8} \sum_{p=1}^{p+1} \frac{\cdot}{p+5} \left[\boxed{\ } \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. \cdot \left[2G(p+1) \left(1 + \left(\frac{\boxed{7}}{\boxed{4}} \right)^{p+1} \right) - \sum_{n=1}^{P} G(n) \cdot G(p-n+1) \left(\frac{\boxed{7}}{\boxed{4}} \right)^{n} \right] \right\} \right.$$

- Cálculo do somatório
- para p = 1

$$\frac{1}{6} \left(\frac{\boxed{3}}{\boxed{7}} \right)^2 \cdot \left[2 \cdot \frac{1}{4} \left(1 + \left(\frac{\boxed{7}}{\boxed{4}} \right)^2 \right) - 1.1. \left(\frac{\boxed{7}}{\boxed{4}} \right)^1 \right] = 0,000683325$$

. para p = 2

$$\left. \left(\frac{\boxed{7}}{\boxed{4}} \right)^2 \right] = \frac{1}{7} \left(\frac{\boxed{3}}{\boxed{7}} \right)^3 \cdot \left[2 \cdot \frac{1}{8} \left(1 + \left(\frac{\boxed{7}}{\boxed{4}} \right)^3 \right) - 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\boxed{7}}{\boxed{4}} \right)^1 - \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \left(\right. \right.$$

$= 0,000028608$

. para p = 3

$$\frac{1}{8} \left(\frac{\boxed{3}}{\boxed{7}} \right)^4 \cdot \left[2 \cdot \frac{5}{64} \left(1 + \left(\frac{\boxed{7}}{\boxed{4}} \right)^4 \right) - 1 \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{\boxed{7}}{\boxed{4}} \right)^1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \right.$$

$$\left. \cdot \left(\frac{\boxed{7}}{\boxed{4}} \right)^2 - \cdot \frac{1}{8} \cdot 1 \left(\frac{\boxed{7}}{\boxed{4}} \right)^3 \right] = 0,000001485$$

$$\therefore \sum_{p=1}^{NP=3} = 0,000713418$$

$$\Delta s_d = \boxed{2} \times 10^{-6}\left\{ \boxed{8} - \boxed{1} - \frac{0,8\ \boxed{3}\ \boxed{5}}{\boxed{8}} - \boxed{8} \cdot 0,\ 000713418 \right\}.$$

$$\Rightarrow \Delta s_d = 6,4098 \text{ m}$$

d) Cálculo da componente úmida - Δs_w

$h_w = 11.000$ m

$$Re_w = 77,6\ (4810)\ \frac{C}{T_o^2} \qquad Re_w = 126,0465866 \quad \boxed{2}$$

$$h_{tro_w} = h_w - H \qquad h_{tro_w} = 10.800 \text{ m} \quad \boxed{3}$$

$$r_{tro_w} = r_o + h_{tro_w} \qquad r_{tro_w} = 6378397,004 \text{ m} \quad \boxed{5}$$

$$U_w = r_{tro_w} + l_2 \qquad U_w = 12321774,49 \text{ m} \quad \boxed{4}$$

$$V_w = r_{tro_w} - l_2 \qquad V_w = 435019,523 \text{ m} \quad \boxed{7}$$

$$W_w = \sqrt{U_w \cdot V_w} \qquad W_w = 2.315.213,265 \text{ m} \quad \boxed{8}$$

$E > 17^\circ \Rightarrow NP = 3$ (algoritmo para altas elevações)

$$\Delta s_w = \boxed{2} \times 10^{-6}\left\{ \boxed{8} - \boxed{1} - \frac{0,8\ \boxed{3}\ \boxed{5}}{\boxed{8}} - \boxed{8} \sum_{p=1}^{3} \frac{1}{p+5} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(\frac{\boxed{3}}{\boxed{7}}\right)^{p+1} \cdot \left[2G(p+1)\left(1 + \left(\frac{\boxed{7}}{\boxed{4}}\right)^{p+1}\right) - \sum_{n=1}^{P} G(n) \cdot G(p-n+1)\left(\frac{\boxed{7}}{\boxed{4}}\right)^{n} \right] \right\}$$

Cálculo do somatório

.para $p = 1$

$$\frac{1}{6}\left(\frac{\boxed{3}}{\boxed{7}}\right)^{2}\cdot\left[2\cdot\frac{1}{4}\left(1+\left(\frac{\boxed{7}}{\boxed{4}}\right)^{2}\right)-1\cdot 1\cdot\left(\frac{\boxed{7}}{\boxed{4}}\right)^{1}\right]=0{,}000047800$$

.para p = 2

$$\frac{1}{7}\left(\frac{\boxed{3}}{\boxed{7}}\right)^{3}\left[2\cdot\frac{1}{8}\left(1+\left(\frac{\boxed{7}}{\boxed{4}}\right)^{3}\right)-1.\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\boxed{7}}{\boxed{4}}\right)^{1}-\frac{1}{4}\cdot 1\left(\frac{\boxed{7}}{\boxed{4}}\right)^{2}\right]=$$

$$=0{,}000000527$$

. para p = 3

$$\frac{1}{8}\left(\frac{\boxed{3}}{\boxed{7}}\right)^{4}\left[2\cdot\frac{5}{64}\cdot\left(1+\left(\frac{\boxed{7}}{\boxed{4}}\right)^{4}\right)-1\cdot\frac{1}{8}\left(\frac{\boxed{7}}{\boxed{4}}\right)^{1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{\boxed{7}}{\boxed{4}}\right)^{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{8}\cdot 1\cdot\left(\frac{\boxed{7}}{\boxed{4}}\right)^{3}\right]=0{,}000000007$$

$$\therefore\ \sum_{p=1}^{NP=2}=0{,}000048334$$

$$\Delta s_w=\boxed{2}\times 10^{-6}\left\{\boxed{8}-\boxed{1}-\frac{0{,}8\ \boxed{3}\ \boxed{5}}{\boxed{8}}-\boxed{8}\ .\ 0{,}000048334\right\}$$

$$\Rightarrow \Delta s_w=0{,}7572\ \text{m}$$

e) Cálculo final

$$\Delta s=\Delta s_d+\Delta s_w\Rightarrow\ \boxed{\Delta s=7{,}1670\ \text{m}}$$

02 - Refazer o problema, utilizando o modelo simplificado de Hopfield, com o cálculo aproximado.

Solução:

a) Cálculos preliminares

Resolução idêntica à do modelo completo.

b) Cálculo da pressão de saturação do vapor d'água

Resolução idêntica à do modelo completo.

c) Cálculo da componente seca - Δs_d

$h_d = 40136 + 148,72\ (T_o - 273,16) \quad \Rightarrow \quad h_d = 44.276,3648$ m

(mesma equação do processo completo)

$$K_d = 77,6 \times \frac{P_o}{T_o} \times \frac{(h_d - H)}{5} \times 10^{-6} m = 77,6 \left(\frac{1020}{301} \right) \cdot \left(\frac{44276,3648 - 200,0}{5} \right) 10^{-6}\ m$$

$K_d = 2,318\ 095$ m e $\theta_d = 2,5^o$

$$\Delta s_d = \frac{K_d}{\text{sen} \left(E^2 + \theta_d^2 \right)^{1/2}} = \frac{2,318095}{\text{sen} \sqrt{(21,03227684)^2 + (2,5)^2}} = \frac{2,318095}{0,361305}\ m$$

$\Delta s_d = 6,415\ 902$ m

d) Cálculo da componente úmida - Δs_w

$h_w = 11.000$ m (mesmo valor assumido no processo completo)

$$K_w = 77,6\ (4810)\ \frac{e}{T_o^2}\ \frac{(h_w - h)}{5} \times 10^{-6}\ m = 77,6\ (4810)\ \frac{(\ 30,59548083\ )}{(301)^2}\ .$$

$$\left(\frac{11.000\ -\ 200}{5}\right) 10^{-6}\ m = 0,272261$$

$$\Delta s_w = \frac{K_w}{\text{sen}\left(E^2 + \theta_w^2\right)^{1/2}} = \frac{0,272261}{\text{sen}\ \sqrt{(21,03227684)^2 + (1,5)^2}} = \frac{0,272261}{0,359764}\ m$$

$$\Delta s_w = 0,756777\ m$$

e) Cálculo final

$$\Delta s = \Delta s_d + \Delta s_w \Rightarrow \boxed{\Delta s = 7,1727m}$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABIB, O.A - *Geodésia geométrica e por satélites*, IME, Rio de Janeiro, RJ, 1981.

ANDRADE, J. B. - *Cálculo da matriz de rotação nas transformações de coordenadas* - Pub da UFPr, Curitiba, PR.

ASHKENAZI, V. - *Determinação de posições geodésicas por meio de satélites Doppler* - Tese de Doutorado

BOMFORD, G. - *Geodesy* Oxford University Press - 3rd edition, 1977.

BROUWER,D;CLEMENCE,G.M.- *Methods of celestial mechanics*, Academics Press, New York, 1961.

ESCOBAL, P. R. - *Methods of orbit determination* New York, John Wiley, 1965

GEMAEL, C. - *Introdução à geodésia celeste (1ª , 2ª , 3ª) partes)* , UFPR, Curitiba, PR, 1975.

KAULA, W. M. - *Theory of satellite geodesy*, Blaisdell Publishing Company, Waltham - Massachusetts, 1966.

KRAKIWSKY, E.J.; WELLS, D. E. - *Coordinate systems in geodesy*, New Brunswick University, 1971.

KRUKOSKY, W. R. M. - *Posicionamento geodésico por satélites NNSS*, IME, Rio de Janeiro, RJ.

LEVALLOIS, J. J. - *Géodésie générale* - (Colletion scientifique de l' Institute Geographique National, Tome IV) Paris, Eyrolles, 1971.

PILCHOWSKY, H. U.; SILVA W. C. C.; FERREIRA, L. D. D. - *Introdução à mecânica celeste*. São José dos Campos, INPE, 1981. (INPE - 2126 - RPE/350).

VASCONCELLOS, J. C. P. - *Posicionamento geodésico com emprego de satélites GPS NAVSTAR aplicando técnicas de VLBI e estimação sequencial recursiva de estado*. São José dos Campos, INPE, 1987. Dissertação de Mestrado. (INPE - 4438 - TDL/311).

VASCONCELLOS, J. C. P. e MOURA A. A. - *MX - 1502. Rastreador de satélites artificiais geodésicos. (operação e manutenção)*. Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, RJ, 1991.

WELLS, D. E. - *Doppler satellite control* . University of New Brunswick, Fredericton, N.B., 1974.

WELLS, D. E. - *Guide to GPS positioning* . Canadian GPS associates, 1986.